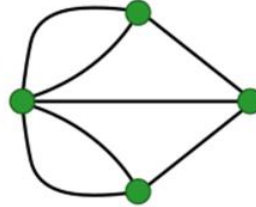
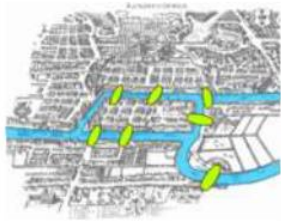


Chapitre 4 – Graphes et chaînes de Markov

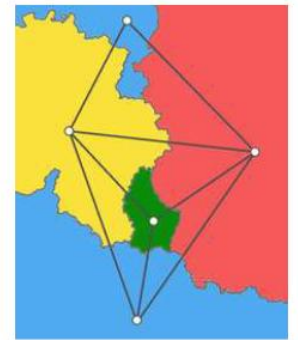
1. Graphes

Le premier problème dont la résolution fait explicitement intervenir la notion de graphes est le **problème des sept ponts de Königsberg**, posé par Euler en 1735. Il s'agit de déterminer un chemin passant une et une seule fois par chacun des sept ponts. Euler a démontré que modélisé sous forme de graphe, un tel chemin (dit *chemin eulérien*) n'existe que si chaque sommet a un nombre pair d'arêtes.



Par la suite, les graphes ont permis de résoudre d'autres problèmes connus, tel que le **théorème des quatre couleurs**, et plusieurs applications ont été trouvées en physique, en économie, en informatique et en probabilités.

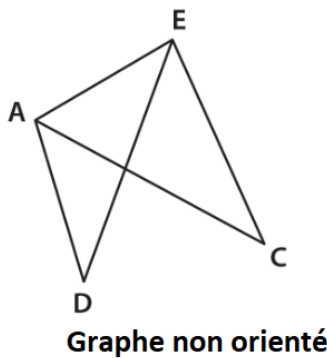
Des problèmes très actuels, tels que la propagation d'une rumeur ou le comportement d'utilisateurs de réseaux sociaux, se modélisent avec des graphes.



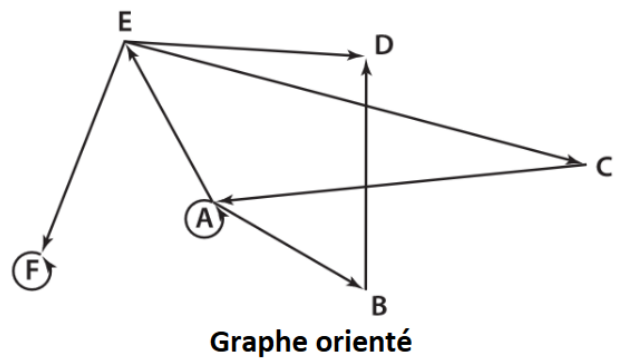
1a. Définitions

Un **graphe d'ordre n** est un ensemble de n **sommets**, reliés entre eux par des **arêtes**.

Si les arêtes ont un sens précis, représenté par une flèche, on parle de **graphe orienté**. Les arêtes sont alors appelées des arcs.



x
B



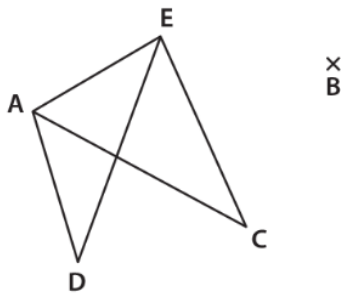
Remarques et définitions associées

- Dans un **graphe orienté**, un sommet peut être relié à lui-même par une **boucle**.
- Un sommet est **adjacent** à un autre s'ils sont reliés par une arête ou un arc.
- Un sommet adjacent à aucun autre est dit **isolé**.
- Le **degré d'un sommet** est son **nombre d'arêtes ou d'arcs (les boucles comptant deux fois)**.
- Un **graphe complet** est un graphe dans lequel tous les sommets sont adjacents entre eux.

1b. Chaînes/Chemins

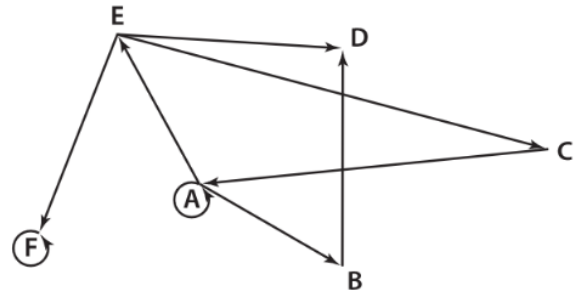
- Dans un graphe, une **chaîne** (on dit aussi un **chemin**) de longueur n est **une succession de n arêtes** (ou arcs) telles que **l'extrémité de chacune est l'origine de la suivante**.
- Si l'origine de la première arête et l'extrémité de la dernière coïncident (le chemin revient à son sommet de départ), on dit que le chemin est **fermé**.
- Si de plus, toutes les arêtes choisies sont **distinctes**, on parle de **cycle** ou de **circuit**.

Exemple 1 Dans le graphe Δ non orienté suivant :



- Donner le degré de chaque sommet dans un tableau. Que peut-on dire de B ?
- Déterminer une chaîne de longueur 3 reliant A à C.
- Déterminer un cycle de longueur 4.

Exemple 2 Dans le graphe Γ orienté suivant :



- Donner le degré de chaque sommet.
- Donner un chemin de longueur 4 reliant E à F.
- Donner un circuit de longueur 4.
- Le point D peut-il faire partie d'un circuit ?

Exemple 1

- A est de degré 3, B est de degré 0, C est de degré 2, D est de degré 2 et E est de degré 3.
- On peut citer $A - D - E - C$. Notez que cette chaîne est bien de longueur 3 alors qu'elle passe par 4 sommets : la longueur d'une chaîne correspond aux nombres d'arêtes.
- On peut citer $A - C - D - E - A$. C'est bien un cycle car il revient au sommet de départ.

Exemple 2

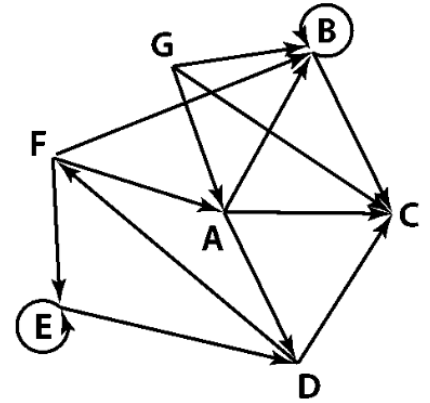
- A est de degré 5 (les boucles comptent double), B est de degré 2, C est de degré 2, D est de degré 2, E est de degré 4 et F est de degré 3.
- $E - C - A - E - F$. (On pouvait citer $E - F - F - F - F$).
- $E - C - A - A - E$. (On passe deux fois par le même sommet, mais pas deux fois par le même arc : il s'agit bien d'un cycle).
- Non, car aucun arc n'a pour origine D.

1c. Somme des degrés

Propriété : la somme des degrés de chaque sommet est égale au double du nombre d'arêtes.

Exemple On considère le graphe orienté ci-contre.

1. Déterminer l'ordre du graphe ainsi que le degré de chaque sommet.
2. En déduire par un calcul le nombre d'arcs de ce graphe.
3. Déterminer un chemin de longueur 5 reliant A à C.
4. Peut-on trouver un circuit d'origine A ?
5. Peut-on trouver un circuit d'origine C ?



1. Il s'agit d'un graphe **d'ordre 7** (*le nombre de sommets*).

A est de degré 5, B est de degré 6, C est de degré 4, D est de degré 4, E est de degré 4, F est de degré 4 et G est de degré 3.

2. $\frac{5+6+4+4+4+4+3}{2} = 15$ donc le graphe comporte **15** arcs.

3. **$A - D - F - B - B - C$.**

4. On peut citer **$A - D - F - A$.**

5. **Non**, car aucun arc n'a pour origine A.

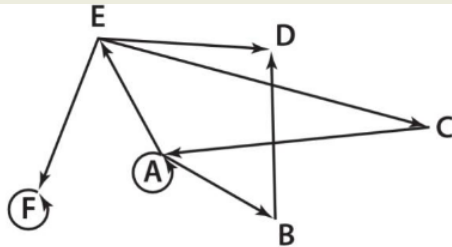
2. Matrices d'adjacence

2a. Définition

À tout graphe G de sommets $s_1; s_2; \dots; s_p$, on peut associer une **matrice carrée** $M(m_{ij})$ où m_{ij} est le nombre d'arcs reliant les sommets s_i à s_j . M est appelée la **matrice d'adjacence** associée à G .

Exemple 1 Déterminer la matrice d'adjacence de ce graphe.

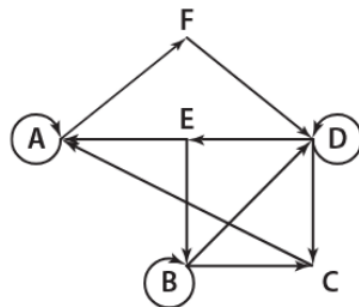
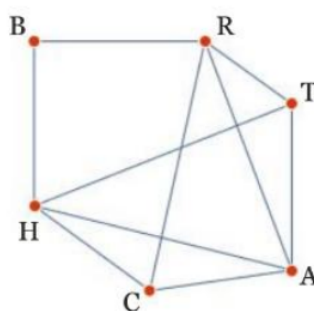
Remarque : la matrice d'adjacence d'un **graphe non orienté** est **symétrique**, c'est-à-dire égale à sa transposée, et ne contient **pas de 1 sur sa diagonale** (un graphe non orienté ne contient pas de boucles).



Exemple 2 Même consigne avec ces deux graphes, dans l'ordre alphabétique des sommets.

Exemple 3 Donner un graphe orienté correspondant à la

matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

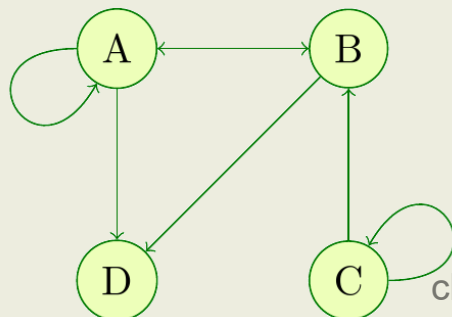


Exemple 1 $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pour un graphe orienté, on va « de la gauche vers le haut ». Exemple : $m_{15} = 1$ car il y a un arc qui va de A à E. Mais $m_{51} = 0$. Aussi, la 4^{ème} ligne ne contient que des 0, car aucun arc n'a pour origine D. On peut donner la matrice ligne par ligne, en listant tous les arcs d'origine A, puis tous les arcs d'origine B, etc.

Exemple 2 $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exemple 3 Notez qu'un graphe orienté peut quand même comporter des arcs non orientés, comme celui qui relie A à B. Généralement, on dessine, alors une double flèche.



2b. Puissances et chemins

Propriété : si pour $n \in \mathbb{N}$, on note $M^n = (m_{ij}^{(n)})$,

alors $m_{ij}^{(n)}$ est le **nombre de chemins de longueur n** reliant s_i à s_j .

Exemple 1 On reprend le graphe précédent, de matrice d'adjacence M :

a. Calculer M^5 et M^{10} à la calculatrice.

b. Combien y a-t-il de chemins de longueur 5 reliant C à F ?

c. Combien y a-t-il de chemins de longueur 10 reliant E à D ?

Exemple 2 Les différentes salles d'un château ont été nommées A, B, C, D, E, F, G, H et I afin de permettre aux visiteurs de se repérer sur le plan.

1. Le graphe donne les parcours possibles d'un visiteur dans ce château.

Déterminer la matrice d'adjacence M de ce graphe (dans l'ordre alphabétique).

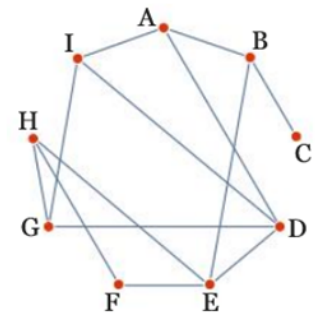
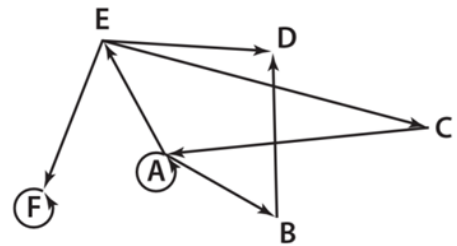
2. On donne $M^4 =$

$$\begin{pmatrix} 20 & 3 & 6 & 11 & 20 & 5 & 18 & 5 & 12 \\ 3 & 16 & 0 & 19 & 3 & 8 & 4 & 12 & 11 \\ 6 & 0 & 3 & 1 & 7 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 11 & 19 & 1 & 31 & 9 & 11 & 12 & 19 & 20 \\ 20 & 3 & 7 & 9 & 28 & 9 & 20 & 9 & 12 \\ 5 & 8 & 1 & 11 & 9 & 9 & 8 & 9 & 6 \\ 18 & 4 & 4 & 12 & 20 & 8 & 20 & 6 & 12 \\ 5 & 12 & 1 & 19 & 9 & 9 & 6 & 17 & 12 \\ 12 & 11 & 2 & 20 & 12 & 6 & 12 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

a. Combien y a-t-il de chaînes qui, en quatre étapes, partent de E et reviennent à E ?

b. Combien y a-t-il de chaînes qui, en quatre étapes, partent de C et arrivent à I ? Les citer.

c. Est-il toujours possible de joindre en quatre étapes deux salles quelconques ? Justifier.



Exemple 1 $M^5 =$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; M^{10} =$$

$$\begin{pmatrix} 28 & 19 & 13 & 26 & 19 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 13 & 9 & 18 & 13 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 9 & 6 & 12 & 9 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il y a donc **3 chemins de longueur 5** reliant C à F ,
et **12 chemins de longueur 10** reliant E à D .

Exemple 2 $M =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2a. Il existe **31 cycles de longueur 4** qui partent et reviennent à E.

2b. Il existe seulement **2 chaînes** de longueur 4 qui partent de C et arrivent à I.
Ce sont $C - B - A - D - I$ et $C - B - E - D - I$.

2c. Non, d'après M^4 , il n'est **pas possible d'aller de B à C** (ou de C à B) en 4 étapes.

3. Algorithme de Dijkstra

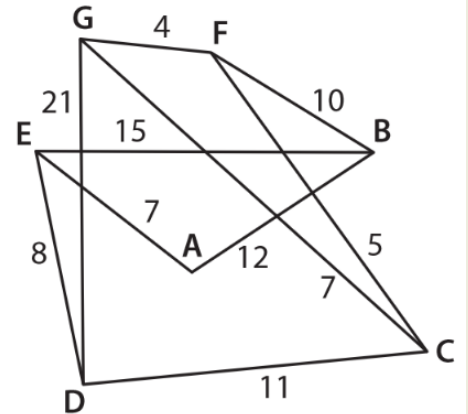
3a. Graphe pondéré

Définition : un graphe est dit pondéré si on affecte à chaque arc, un nombre positif, appelé poids.

Le poids d'un chemin est alors la somme des poids des arcs qui le composent.

Exemple Dans le graphe non orienté ci-contre :

- a. Donner le poids du chemin $G - F - C - D - E$
- b. Donner le poids du circuit $B - A - E - B$.



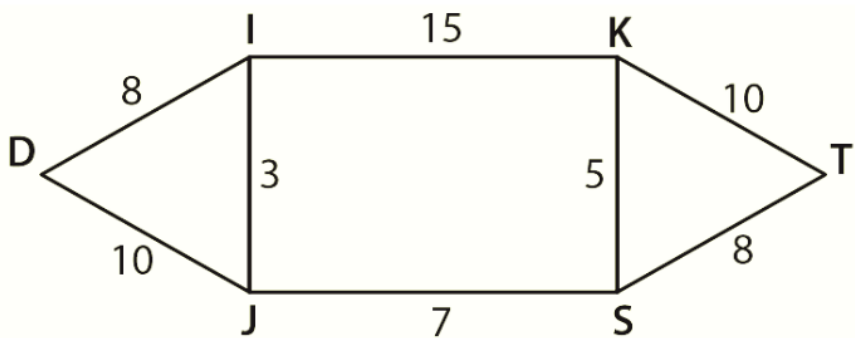
a. Le poids du chemin $G - F - C - D - E$ est $4 + 5 + 11 + 8 = 28$.

b. Le poids du chemin $B - A - E - B$ est $12 + 7 + 15 = 34$.

3b. Algorithme

Algorithme de Dijkstra

On cherche le plus court chemin entre une origine D et un autre sommet du graphe. Chaque sommet est marqué par le poids du plus court chemin conduisant de l'origine à ce sommet.



- 1. Initialisation.** On fixe la marque de D à 0. Marquer chacun des sommets adjacents à D par le poids de l'arête joignant ce sommet à D. Marquer les autres sommets par ∞ .
 - 2. Marquage.** Regarder tous les sommets de marque non fixée et repérer celui qui a la plus petite marque pour la fixer : on note X ce sommet.
 - 3. Exploration.** Pour chaque sommet Y de marque non fixée adjacent à X, calculer la somme de la marque de X avec le poids de l'arête reliant X à Y.
 - 4. Décision.** Si cette somme est inférieure à la marque Y, remplacer la marque de Y par cette somme en indiquant entre parenthèses la provenance de cette nouvelle marque optimale.
 - 5. Itération.** Recommencer à partir de 2. jusqu'à avoir parcouru tous les sommets et exploré tout le graphe.
 - 6. Fin de l'algorithme.** Toutes les marques étant optimales, la marque fixée du sommet Y est le poids d'une plus courte chaîne reliant D à Y.
- Les résultats de chaque itération peuvent aussi être présentés dans un tableau.

Voici un exemple de présentation des résultats.

Sommet traité	D	I	J	K	S	T
D	0	8(D)	10(D)	∞	∞	∞
I	0	8(D)	10(D)	23(I)	∞	∞
J	0	8(D)	10(D)	23(I)	17(J)	∞
S	0	8(D)	10(D)	22(S)	17(J)	25(S)
K	0	8(D)	10(D)	22(S)	17(J)	25(S)

Par exemple, en première ligne, on traite D comme expliqué à l'étape 1. Ensuite, on choisit I, le sommet qui a la plus petite marque, et on applique les étapes 2 à 5 : on explore K pour une somme de $8 + 15 = 23$, et on explore J mais la somme $8 + 3 = 11$ est supérieure à la marque 10, donc on conserve le 10. On réitère ces étapes sur J, puis S, et K. Ainsi, en repartant de ce qu'on a trouvé sur T on trouve que le chemin le plus court de T à D est : $T - S - J - D$ (et donc le chemin le plus court de D à T est $D - J - S - T$).

4. Chaînes de Markov

4a. Définition

Andreï Markov réalise des travaux sur les probabilités à la fin du XIX^e siècle qui l'amènent à définir les chaînes de Markov, qui représentent les prémices du calcul stochastique : l'étude des phénomènes aléatoires dépendant du temps.

Les chaînes de Markov ont des applications en mécanique, en chimie, et en finance. En Terminale, nous n'en étudierons qu'une version très simplifiée, mais qui reprend l'idée générale consistant à étudier une expérience aléatoire qui évolue dans le temps.



Définition : On considère un système qui évolue en fonction du temps. L'ensemble des états possibles de ce système est noté $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_p\}$.

On définit une suite (X_n) de variables aléatoires pouvant prendre, à tout instant $n \in \mathbb{N}$, une valeur parmi $e_1; e_2; \dots; e_p$.

On dit que (X_n) définit une **chaîne de Markov homogène** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité que X_{n+1} prenne une certaine valeur ne dépend que de la valeur de X_n , et pas des valeurs précédentes.

Remarque : Cette définition est très, très simplifiée par rapport à sa version rigoureuse.

Exemple 1 Un poisson nage dans un aquarium. Celui-ci est constitué de deux bocal numérotés 1 et 2.

Pour tout n entier, on note X_n la position du poisson à la n -ième minute. On suppose que, s'il se trouve dans le bocal 1, il y reste l'instant suivant avec une probabilité de 0,4. S'il se trouve dans le bocal 2, il y reste l'instant suivant avec probabilité de 0,7.

- a. Donner l'ensemble des états Ω . b. Justifier que la suite (X_n) définit bien une chaîne de Markov.
c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner les probabilités conditionnelles intervenant dans ce problème, de la forme $p_{X_n=k}(X_{n+1} = l)$, où k et l sont des états possibles.

Exemple 2 Tous les jours, Noé envoie un message à l'un de ses trois amis, jamais deux fois de suite au même mais de manière équiprobable aux deux autres. Justifier que l'on peut parler d'une chaîne de Markov.

Exemple 3 Une montre est détraquée. À chaque seconde, l'aiguille des secondes passe d'un chiffre à un chiffre voisin de manière équiprobable. On note X_n la position de l'aiguille après n secondes. Peut-on parler de chaîne de Markov ? Quels sont alors les états ?

Exemple 1 a. Les états sont $\Omega = \{1; 2\}$.

b. Le bocal dans lequel le poisson se trouve à un instant n détermine entièrement les probabilités que le poisson a de se retrouver dans un bocal à l'instant $(n + 1)$. Donc (X_n) définit bien une chaîne de Markov.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- si le poisson est dans le bocal 1, il y reste avec une probabilité de 0,4. Ainsi, $p_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) = 0,4$; et donc $p_{X_n=1}(X_{n+1} = 2) = 0,6$.
- De même, $p_{X_n=2}(X_{n+1} = 2) = 0,7$; et donc $p_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) = 0,3$.

Exemple 2

L'ami auquel Noé a envoyé un message au jour n détermine les probabilités du jour $(n + 1)$. Par exemple, si Noé a envoyé un message à l'ami A, alors le jour suivant, il enverra un message à B ou C uniquement, avec équiprobabilité. Il s'agit donc bien d'une **chaîne de Markov**.

Exemple 3

La position d'une aiguille à une seconde n détermine entièrement les probabilités de la seconde suivante. Par exemple, si l'aiguille est en position 7, alors elle passera en position 6 ou 8 avec équiprobabilité.

(X_n) définit donc bien une **chaîne de Markov**.

L'espace d'état est l'ensemble des entiers de 0 à 59 : $\Omega = \{0; 1; 2; \dots; 59\}$.

4b. Graphe probabiliste

Définition : Un graphe probabiliste est un graphe orienté et pondéré tel que, pour chaque sommet, la **somme des poids des arcs issus de ce sommet vaut 1**.

A toute chaîne de Markov, on peut associer un graphe probabiliste.

Exemple 1 Donner les graphes probabilistes associées aux expériences des exemples précédents.

a. Un poisson nage dans un aquarium. Celui-ci est constitué de deux bocal numérotés 1 et 2. On suppose que, s'il se trouve dans le bocal 1, il y reste l'instant suivant avec une probabilité de 0,4. S'il se trouve dans le bocal 2, il y reste l'instant suivant avec probabilité de 0,7.

b. Tous les jours, Noé envoie un message à l'un de ses trois amis, jamais deux fois de suites au même mais de manière équiprobable aux deux autres.

Exemple 2 La météo varie entre beau et mauvais temps. Après un jour de beau temps, il y a une chance sur deux que le temps change le jour suivant et le mauvais temps a trois fois plus de chance de durer d'un jour au jour suivant. On note X_n le climat du n-ième jour. Déterminer le graphe probabiliste de (X_n) .

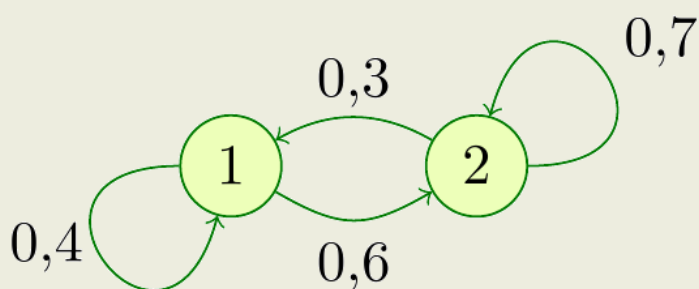
Exemple 3 Dans un lycée, la salle des professeurs contient deux photocopieuses pouvant tomber en panne de manière indépendante l'une de l'autre dans la journée avec une probabilité $\frac{1}{3}$.

On suppose que si une machine tombe en panne, elle est réparée dans la nuit mais que l'on ne peut réparer qu'une seule photocopieuse en une nuit. On note X_n le nombre de photocopieuses encore en panne au matin du n-ième jour et on admet que (X_n) suit une chaîne de Markov.

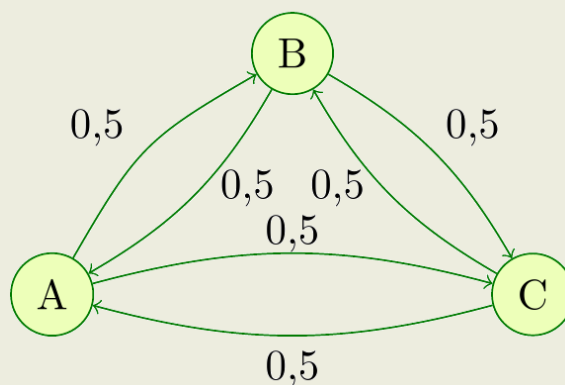
Déterminer l'espace d'état et toutes les probabilités conditionnelles de la forme $p_{X_n=x}(X_{n+1} = y)$, puis déterminer le graphe probabiliste de (X_n) .

Exemple 1

a.



b.



Exemple 2

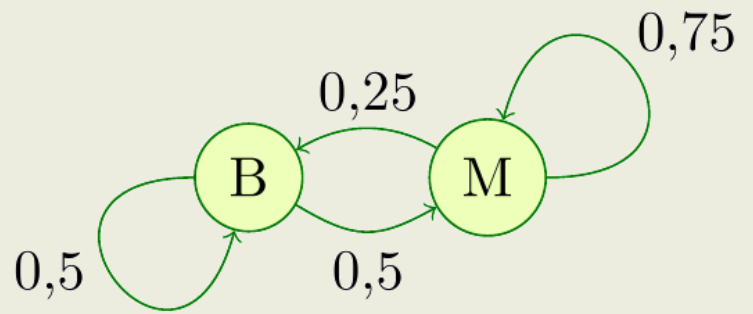
On appelle les états B et M.

Notez que pour le mauvais temps, on a

$$p_{X_n=M}(X_{n+1} = M) = 0,75,$$

ce qui est bien trois fois plus grand que

$$p_{X_n=M}(X_{n+1} = B) = 0,25.$$



Exemple 3

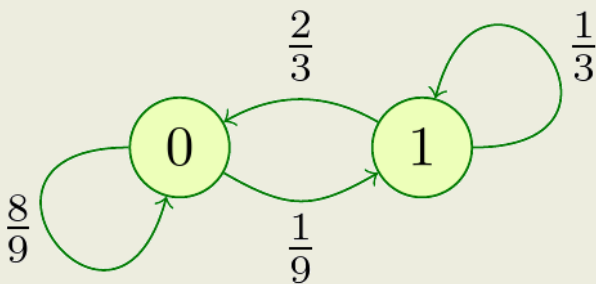
Même si les deux photocopieuses tombent en panne le même jour, l'une d'entre elles sera réparée dans la nuit. Il ne peut donc y avoir qu'une seule photocopieuse en panne au matin. Donc $\Omega = \{0; 1\}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- Si une photocopieuse est en panne le matin, la photocopieuse restante peut tomber en panne avec probabilité $\frac{1}{3}$. Dans ce cas, elle sera réparée la nuit et il y aura, à nouveau, une photocopieuse en panne au matin suivant.

$$p_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3} \text{ et ainsi } p_{X_n=1}(X_{n+1} = 0) = \frac{2}{3}$$

- Si les deux photocopieuses sont fonctionnelles le matin, alors la seule possibilité pour que l'une d'entre elles soit en panne le matin suivant correspond au cas où les deux tombent en panne ce jour-là. L'une d'entre elles sera alors réparée pour le matin suivant.

$$p_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \text{ et donc } p_{X_n=0}(X_{n+1} = 0) = \frac{8}{9}$$

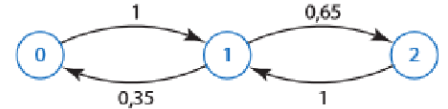


4c. Matrice de transition

Définition : La matrice de transition est la matrice $M = (m_{ij})$ tel que m_{ij} représente la probabilité de passer de l'état e_i à l'état e_j .

Propriété : La somme des coefficients des lignes d'une matrice de transition M est égale à 1. En général, une matrice qui vérifie cette propriété est appelée matrice stochastique.

Exemple 1 Donner la matrice de transition associée à la chaîne de Markov dont les états sont 0, 1, 2 et dont le graphe est représenté ci-contre.

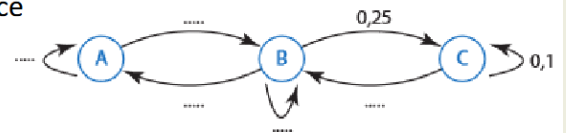


Exemple 2 On considère une chaîne de Markov (X_n) d'espace d'états

$\{A; B; C\}$ et dont la matrice de transition est $Q = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}$. Dresser le graphe associé.

Exemple 3 Soit une chaîne de Markov pour laquelle on donne une matrice

de transition $M = \begin{pmatrix} \dots & 0,4 & \dots \\ \dots & 0,2 & \dots \\ \dots & 0,9 & \dots \end{pmatrix}$ et le graphe ci-contre. Compléter.



Exemple 4 On dispose de deux urnes A et B. L'urne A contient au départ deux boules.

A chaque étape, on choisit au hasard une boule et on déplace la boule choisie dans l'autre urne.

On désigne par X_n la variable aléatoire représentant le nombre de boules dans l'urne A à l'instant n .

a. Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov et donner son espace d'états.

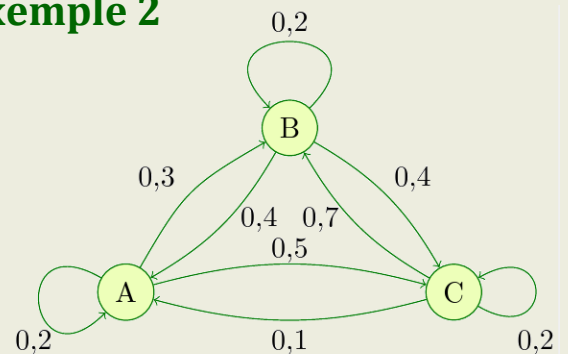
b. Dresser le graphe probabiliste associé et donner la matrice de transition.

Exemple 1

On dresse la matrice dans l'ordre 0; 1; 2. Notez qu'il n'y a pas de boucles, donc la diagonale ne comporte que des 0.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,35 & 0 & 0,65 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

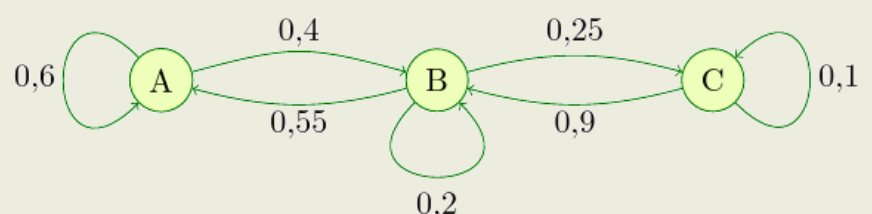
Exemple 2



Exemple 3

On complète d'abord le graphe avec les informations de la matrice, et réciproquement. Le graphe nous dit aussi qu'il n'y a pas d'arc reliant A à C. Il reste encore des coefficients manquants, mais on utilise alors le fait que la somme des lignes de la matrice doit être égale à 1.

$$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,55 & 0,2 & 0,25 \\ 0 & 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$$



Exemple 4

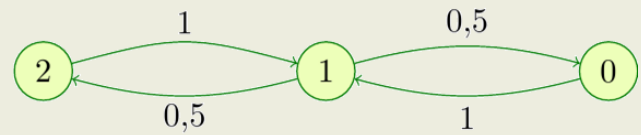
a. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'instant n :

- si l'urne A contient les 2 boules, l'une d'entre elles sera forcément déplacée et il y aura 1 boule à l'instant $(n + 1)$.
- si l'urne A contient 1 boule, soit on la déplace vers l'urne B, soit c'est celle de l'urne B qui est déplacée en urne A, avec équiprobabilité.
- si l'urne A contient 0 boule, alors une boule de l'urne B sera déplacée en urne A.

Le nombre de boules dans l'urne A (et donc, dans l'urne B) détermine entièrement les probabilités à l'instant suivant, donc (X_n) est une **chaîne de**

Markov avec $\Omega = \{0; 1; 2\}$.

b. On a $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et le graphe est :



5. Distributions

5a. Distribution initiale

Définition : On appelle distribution initiale de la chaîne de Markov, la loi de la variable X_0 . On la représente par un vecteur ligne, noté π_0 .

Le graphe probabiliste et la matrice de transition donnent les probabilités, à chaque étape, de passer d'un état donné à un autre. Ainsi, ils ne donnent que des probabilités conditionnelles, du type $p_{X_n=e_i}(X_{n+1} = e_j)$.

Pour étudier une chaîne de Markov, il nous manquait donc la **distribution initiale**, qui donne les probabilités « au début de l'expérience ».

Exemple 1 Des employés d'une entreprise ont le choix entre deux navigateurs Internet : *IceWolf* et *Cadmium*. En 2020, 80 % des employés utilisent *IceWolf*. D'après une étude, il apparaît que, chaque année :

- parmi les employés ayant choisi *IceWolf*, 30 % d'entre eux restent sur ce navigateur.
- parmi ceux ayant choisi *Cadmium*, 20 % changent pour *IceWolf*.

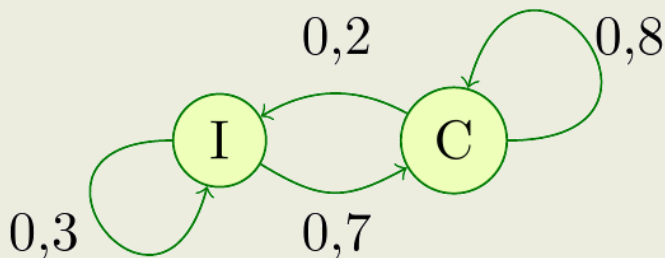
Réaliser un graphe probabiliste correspondant à la situation et déterminer la distribution initiale.

Exemple 2 Un robot aspirateur doit nettoyer la surface d'un appartement de trois pièces alignées, A , B et C . À l'instant 0, le robot se trouve soit dans la pièce A , soit dans la pièce B , en ayant trois fois plus de probabilité d'être dans A que d'être dans B .

À l'instant n , il se déplace au hasard dans l'une des pièces communicantes de manière équiprobable.

Déterminer la distribution initiale et la matrice de transition.

Exemple 1



D'après l'énoncé, $\pi_0 = (0,8 \quad 0,2)$.

Exemple 2

D'après l'énoncé, $\pi_0 = (0,75 \quad 0,25 \quad 0)$. On a bien $0,75 = 3 \times 0,25$, comme dans l'exemple qui portait sur le beau et le mauvais temps.

La matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$

5b. Distributions

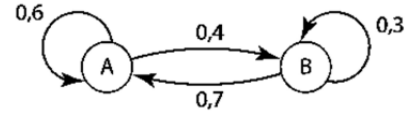
Définition : On appelle distributions les **vecteurs lignes** (π_n) donnant les lois des variables (X_n) .

Propriété : Si M est la matrice de transition, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\pi_n = \pi_0 M^n$$

Exemple 1 On considère la chaîne de Markov (X_n) correspondant à deux états A et B et dont le graphe probabiliste est donné ci-contre.

En supposant que $p(X_0 = A) = 0,7$, donner la distribution initiale π_0 et déterminer π_2 .



Exemple 2 Un fumeur décide un jour 0 d'arrêter de fumer.

Au jour $n \in \mathbb{N}$, s'il ne fume pas, alors le jour suivant, il fumera avec une probabilité de 0,2 ; s'il fume, il fumera le jour suivant avec une probabilité de 0,75. Déterminer la probabilité p_2 que le fumeur ne fume pas au jour 2.

Exemple 3

Un mini réseau Internet comprend trois pages web : 1, 2 et 3. Un individu navigue de manière aléatoire sur ce réseau, en commençant par la page 1. À chaque clic, il se rend de façon équiprobable sur une autre page que sa page actuelle. Après n clics, on note X_n la variable aléatoire donnant la page sur laquelle se trouve le surfeur.

- Justifier que (X_n) forme une chaîne de Markov. Donner sa distribution initiale et sa matrice de transition.
- A l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité qu'au bout de 8 clics, l'individu soit de retour sur la page 1.

Exemple 1

Il n'y a que deux états, donc $\pi_0 = (0,7 \quad 0,3)$.

La matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$.

À la calculatrice, $\pi_2 = \pi_0 M^2 = (0,637 \quad 0,363)$.

Exemple 2 Le fumeur a décidé d'arrêter au jour 0, donc $\pi_0 = (1 \quad 0)$.

La matrice de transition (dans le sens non-fumeur, puis fumeur) est

$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$$

On calcule $\pi_2 = \pi_0 M^2 = (0,69 \quad 0,31)$.

Ainsi, la probabilité qu'il ne fume pas au jour 2 est de **0,69**.

Exemple 3

a. La page sur laquelle se trouve l'individu à l'instant n détermine entièrement les probabilités qu'il se trouve sur une des autres pages à l'instant $(n + 1)$.

Donc (X_n) est une **chaîne de Markov**.

$$\pi_0 = (1 \quad 0 \quad 0) \text{ et } M = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

b. On calcule $\pi_8 = \pi_0 M^8 \approx (0,336 \quad 0,332 \quad 0,332)$.

Donc la probabilité que cet étrange individu soit de retour sur la page 1 après 8 clics est d'environ **0,336**.

5c. Distribution invariante

Définition : Une distribution invariante est une distribution π qui vérifie :

$$\pi = \pi M$$

Propriété : Si les coefficients non diagonaux de la matrice de transition sont tous non nuls, alors il existe une unique distribution invariante.

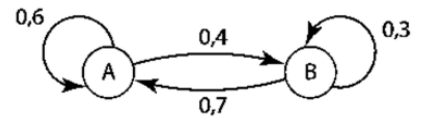
Remarque : c'est le cas quand les probabilités contenues dans les distributions (π_n) convergent, c'est-à-dire que les probabilités de chaque état se rapprochent de plus en plus d'une valeur limite pour n assez grand.

Exemple On considère la chaîne de Markov (X_n) correspondant à deux états A et B et dont le graphe probabiliste est donné ci-contre.

Soit $\pi_0 = (0,5 \ 0,5)$ la distribution initiale.

a. Calculer (à la calculatrice) π_3 , π_5 et π_{10} . Que remarque-t-on ?

b. Montrer que (X_n) admet une distribution invariante et déterminer sa valeur.



a. Nous devons d'abord déterminer $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$

On calcule $\pi_3 = \pi_0 M^3 = (0,6365 \ 0,3635)$

$\pi_5 = \pi_0 M^5 \approx (0,6364 \ 0,3636)$

et $\pi_{10} = \pi_0 M^{10} \approx (0,6364 \ 0,3636)$

Les distributions semblent converger vers une distribution invariante.

b. Les coefficients non diagonaux de la matrice M (0,7 et 0,4) sont tous différents de 0, donc il existe une **unique distribution invariante**. Notons-la $\pi = (x \ y)$.

La somme de ces deux probabilités étant 1, il vient $\pi = (x \ 1 - x)$.

$$\text{Or } \pi = \pi M \Leftrightarrow (x \ 1 - x) \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix} = (x \ 1 - x)$$

$$\Leftrightarrow (0,6x + 0,7(1 - x) \ 0,4x + 0,3(1 - x)) = (x \ 1 - x)$$

On réécrit cette égalité de matrices lignes sous forme d'équations :

$$\begin{cases} 0,6x + 0,7(1 - x) = x \\ 0,4x + 0,3(1 - x) = 1 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,6x + 0,7 - 0,7x = x \\ 0,4x + 0,3 - 0,3x = 1 - x \end{cases}$$

Il n'y a qu'une inconnue, donc on peut résoudre ces deux équations en parallèle. On devrait trouver le même résultat.

$$\begin{cases} 0,6x + 0,7 - 0,7x = x \\ 0,4x + 0,3 - 0,3x = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1,1x = -0,7 \\ 1,1x = 0,7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{11} \\ x = \frac{7}{11} \end{cases}$$

On n'a pas de contradiction, la distribution invariante est donc $\pi = (\frac{7}{11} \ \frac{4}{11})$

Ces deux fractions sont bien approximativement égales aux valeurs trouvées pour π_5 et π_{10} en question a.