

Correction des exercices de premières applications de la divisibilité

Exercice 1

$n^2 + 7n + 10 = n^2 + 4n + 4 + 3n + 6 = (n + 2)^2 + 3(n + 2) = (n + 2)(n + 2 + 3) = (n + 2)(n + 5)$
Donc $(n + 2)$ divise bien $(n^2 + 7n + 10)$.

Exercice 2

Soit $n < 100$. Alors si a est le chiffre des dizaines de n et b son chiffre des unités, on a $n = 10a + b$.
Ainsi, $n - (a + b) = 10n + b - a - b = 9n$, donc le résultat est bien divisible par 9.

Exercice 3 a. Si $(n - 4)$ divise $(n + 17)$, alors il existe un entier k tel que

$$\begin{aligned}n + 17 &= k(n - 4) \\ \Leftrightarrow (n - 4) + 21 &= k(n - 4) \\ \Leftrightarrow 21 &= k(n - 4) - (n - 4) \\ \Leftrightarrow 21 &= (k - 1)(n - 4)\end{aligned}$$

et ainsi $(n - 4)$ divise 21.

b. La fraction est un nombre entier si $(n - 4)$ divise $(n + 17)$, donc si $n - 4$ divise 21.
Les diviseurs de 21 sont 1 ; 3 ; 7 et 21. Donc $(n - 4)$ ne peut être égal qu'à ces 4 nombres.
On en déduit que n ne peut être égal qu'à **5 ; 7 ; 11 ou 25**.

Exercice 4

Comme dans l'exercice précédent, cette fraction est un entier si et seulement si $(6m + 12)$ divise $(2m + 1)$.
Cherchons à obtenir une condition de divisibilité sur m .

$$\begin{aligned}6m + 12 &= k(2m + 1) \\ \Leftrightarrow 12 &= k(2m + 1) - 6m \\ \Leftrightarrow 12 - 3 &= k(2m + 1) - 6m - 3 \\ \Leftrightarrow 9 &= k(2m + 1) - 3(2m + 1) \\ \Leftrightarrow 9 &= (k - 3)(2m + 1)\end{aligned}$$

Ainsi, il faut que $2m + 1$ divise 9. m étant un entier relatif, $2m + 1 \in \{-9 ; -3 ; -1 ; 1 ; 3 ; 9\}$.

Et donc les valeurs possibles pour m sont dans $\{-5 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 4\}$.

Exercice 5

a. $a_1 = 2^3 - 3^1 = 8 - 3 = 5$. $a_2 = 2^6 - 3^2 = 64 - 9 = 55$ et $a_3 = 2^9 - 3^3 = 512 - 27 = 485$.

Il semblerait que tous ces nombres soient **divisibles par 5**.

b. L'initialisation a été faite en question a.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que a_n soit divisible par 5. Montrons alors que a_{n+1} est aussi divisible par 5.

Par hypothèse de récurrence, il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\begin{aligned}a_n &= 5k \\ \Leftrightarrow 2^{3n} - 3^n &= 5k \\ \Leftrightarrow 2^3(2^{3n} - 3^n) &= 2^3 \times 5k \\ \Leftrightarrow 2^{3(n+1)} - 2^3 3^n &= 40k \\ \Leftrightarrow 2^{3(n+1)} - 8 \times 3^n &= 40k \\ \Leftrightarrow 2^{3(n+1)} - 3^n(3 + 5) &= 40k \\ \Leftrightarrow 2^{3(n+1)} - 3^{n+1} - 5 \times 3^n &= 40k \\ \Leftrightarrow 2^{3(n+1)} - 3^{n+1} &= 40k + 5 \times 3^n \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= 5(8k + 3^n)\end{aligned}$$

Ainsi, a_{n+1} est divisible par 5.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, **a_n est divisible par 5**.

Correction des exercices sur les équations diophantiennes

Exercice 1

a. Les diviseurs de 20 sont 1; 2; 4; 5; 10 et 20.

b. $4x^2 - y^2 = 20 \Leftrightarrow (2x + y)(2x - y) = 20$.

Comme x et y sont positifs, on peut supposer que $2x + y > 2x - y$. On a alors 3 possibilités.

$$\begin{cases} 2x + y = 20 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20 - 2x \\ 2x - (20 - 2x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20 - 2x \\ 4x = 21 \end{cases} \text{ ce qui est impossible, car alors } x = 5,25.$$

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 2x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ 2x - (10 - 2x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ 4x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2 \times 3 = 4 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ 2x - (5 - 2x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ 4x = 6 \end{cases} \text{ ce qui est impossible, car } x = 1,5.$$

Ainsi, le seul couple solution est **(3; 4)**

Exercice 2

$$5x^2 - 7xy = 17 \Leftrightarrow x(5x - 7y) = 17$$

17 n'ayant que deux diviseurs positifs, il n'existe que deux possibilités.

$$\begin{cases} x = 17 \\ 5x - 7y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 \\ 5 \times 17 - 7y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 \\ -7y = -84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ 5x - 7y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 5 \times 1 - 7y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -7y = 12 \end{cases} \text{ ce qui est impossible, car alors } y \text{ n'est pas entier.}$$

Ainsi, le seul couple solution est **(17; 12)**.

Exercice 3

a. Les diviseurs de 24 sont 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12 et 24.

b. $n^2 - 24$ est le carré d'un entier naturel si et seulement s'il existe k tel que :

$$n^2 - 24 = k^2 \Leftrightarrow n^2 - k^2 = 24 \Leftrightarrow (n + k)(n - k) = 24$$

Comme $n^2 - 24 = k^2$, on a $n > k$.

De plus, $n + k$ et $n - k$ sont de même parité, on ne peut pas avoir l'un impair et l'autre pair.

Les seuls couples de diviseurs qui conviennent sont donc :

$$\begin{cases} n + k = 12 \\ n - k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 7 \\ k = 5 \end{cases}; \begin{cases} n + k = 6 \\ n - k = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \\ k = 1 \end{cases}$$

Ainsi, $n \in \{7; 5\}$.

Correction des exercices sur la division euclidienne

Exercice 1

a. On a bien $1\,208 = 23 \times 51 + 35$ avec $35 < 51$, donc **le quotient est 23 et le reste est bien 35.**

b. En revanche, $35 \geq 23$, donc l'opération proposée n'est pas la division euclidienne de 1 208 par 23. Mais $1\,208 = 23 \times 51 + 35 = 23 \times 51 + 23 + 12 = 23 \times 52 + 12$.

Comme $12 < 23$, **le quotient est 52 et le reste est 12.**

c. $1\,208 = 23 \times 51 + 35 \Leftrightarrow -1\,208 = -23 \times 51 - 35$, mais le reste doit être compris entre 0 et 51.

$$-1\,208 = -23 \times 51 - 35 = -23 \times 51 - 51 + 16 = -24 \times 51 + 16$$

On a bien $16 < 51$, donc **le quotient est -24 et le reste est 16.**

Exercice 2

On sait que $n = 11q + 8$ et $p = 11q' + 7$ avec q et q' des quotients qui sont inconnus.

$$\text{Mais alors } n + p = 11q + 8 + 11q' + 7 = 11(q + q') + 15$$

La question n'est pas réglée car $15 \geq 11$.

$$\text{Mais } n + p = 11(q + q') + 15 = 11(q + q') + 11 + 4 = 11(q + q' + 1) + 4$$

On a bien $4 < 11$, donc **le reste de $n + p$ dans la division euclidienne par 11 est 4.**

Exercice 3

On sait que $a = 7q + 6$. Alors

$$\bullet 2a = 2(7q + 6) = 7 \times 2q + 12 = 7 \times 2q + 7 + 5 = 7(2q + 1) + 5 \text{ et le reste de } 2a \text{ est } 5.$$

$$\bullet -3a = -3(7q + 6) = 7 \times (-3q) - 18 = 7 \times (-3q) - 21 + 3 = 7 \times (-3q - 3) + 3 \text{ et le reste de } -3a \text{ est } 3.$$

$$\bullet 4a = 4(7q + 6) = 7 \times 4q + 24 = 7 \times 4q + 21 + 3 = 7(4q + 3) + 3 \text{ et le reste de } 4a \text{ est } 3.$$

Exercice 4

On cherche n tel que $n = 4q + 1$. Comme $246 \leq n \leq 260$, on a $61 \leq q \leq 65$.

Si $q = 61$, on obtient $n = 4 \times 61 + 1 = 245$ qui ne convient pas.

Si $q = 62$, on obtient $n = 4 \times 62 + 1 = 249$. Or $249 = 3 \times 83 + 0$, donc cela ne correspond pas.

Si $q = 63$, on obtient $n = 4 \times 63 + 1 = 253$. Or $253 = 3 \times 84 + 1$, donc cela ne correspond pas.

Si $q = 64$, on obtient $n = 4 \times 64 + 1 = 257$. Or $257 = 3 \times 85 + 2$, ce qui correspond aux deux critères.

Ainsi, **$n = 257$.**

Exercice 5

L'énoncé nous dit que $n = 5q + 3$ et que $n = 6(q - 1) + 4$.

$$\text{Ainsi, } 5q + 3 = 6(q - 1) + 4 \Leftrightarrow 5q + 3 = 6q - 6 + 4 \Leftrightarrow -q = -5 \Leftrightarrow q = 5.$$

Ainsi, **$n = 5 \times 5 + 3 = 28$.** On vérifie bien que $28 = 6 \times 4 + 4$.

Exercice 6

Soient a et b ces deux entiers. On peut supposer que $a > b$.

On sait que $a - b = 538$ et que $a = 13b + 34$.

$$\text{Or } a - b = 538 \Leftrightarrow a = 538 + b.$$

$$\text{Donc } a = 13b + 34 \Leftrightarrow 538 + b = 13b + 34 \Leftrightarrow 12b = 504 \Leftrightarrow b = 42.$$

On en déduit **$a = 538 + 42 = 580$.**

Exercice 7

Jeanne a oublié le fait que n pouvait être inférieur ou égal à 8, et dans ce cas, le reste dans la division par n ne peut pas être 8.