

Exercices : premières applications de la divisibilité

Exercice 1 Soit n un entier naturel. Démontrer que $(n + 2)$ divise $(n^2 + 7n + 10)$.

Exercice 2 Montrer que, si l'on soustrait à un entier naturel strictement inférieur à 100 la somme de ses chiffres, alors le résultat est divisible par 9.

Exercice 3 a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que si $(n - 4)$ divise $(n + 17)$, alors $(n - 4)$ divise 21.

b. En déduire toutes les valeurs de $n > 4$ telle que la fraction $\frac{n+17}{n-4}$ soit un nombre entier.

Exercice 4 Soit m un entier relatif. Pour quelles valeurs de n la fraction $\frac{6m+12}{2m+1}$ est-elle un entier relatif ?

Exercice 5 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 2^{3n} - 3^n$.

a. Calculer a_1 , a_2 et a_3 . Conjecturer l'existence d'un diviseur de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercices : équations diophantiennes

Exercice 1 a. Donner la liste des diviseurs de 20 dans $\mathbb{N}$.

b. En déduire tous les couples d'entiers naturels $(x; y)$ vérifiant $4x^2 - y^2 = 20$.

Exercice 2 Déterminer les couples d'entiers naturels $(x; y)$ vérifiant $5x^2 - 7xy = 17$.

Exercice 3 a. Déterminer les diviseurs positifs de 24.

b. Quels sont les entiers naturels n tels que $n^2 - 24$ soit le carré d'un entier naturel ?

Exercices : division euclidienne

Exercice 1 On considère l'égalité suivante : $1\,208 = 23 \times 51 + 35$. Répondre aux questions suivantes.

a. Quels sont le quotient et le reste de la division de 1 208 par 51 ?

b. Quels sont le quotient et le reste de la division de 1 208 par 23 ?

c. Quels sont le quotient et le reste de la division de $-1\,208$ par 51 ?

Exercice 2 Soit n et p deux entiers naturels. On sait que le reste dans la division euclidienne de n par 11 vaut 8 et que le reste dans la division euclidienne de p par 11 vaut 7.

Quel est le reste de $n + p$ dans la division euclidienne par 11 ?

Exercice 3 Sachant que le reste de la division euclidienne d'un entier a par 7 est 6, déterminer le reste de la division euclidienne de $2a$ par 7, de $-3a$ par 7, et de $4a$ par 7.

Exercice 4 À la pointe ouest de l'île de Ré, se situe le grand phare des baleines. L'escalier qui mène au sommet a un nombre de marches compris entre 246 et 260.

Ted et Laure sont deux sportifs. Laure qui est plus jeune monte les marches 4 par 4 et à la fin il lui reste 1 marche. Ted, lui, monte les marches 3 par 3 et à la fin il lui reste 2 marches.

Combien l'escalier compte-t-il de marches ?

Exercice 5 Un entier naturel n est tel que si on le divise par 5 le reste vaut 3,

et si on le divise par 6 le reste augmente de 1 et le quotient diminue de 1. Déterminer n .

Exercice 6 La différence de deux entiers naturels est 538.

Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 13 et le reste 34. Quels sont ces entiers ?

Exercice 7 Soit n un entier naturel non nul. On recherche le reste de la division euclidienne de $(n + 2)^3$ par n .

Jeanne fait le raisonnement suivant : « $(n + 2)^3 = n(n^2 + 6n + 12) + 8$ donc le reste de la division de

$(n + 2)^3$ par n est 8 ». Meryem choisit un exemple : « $(6 + 2)^3 = 512$ et $512 = 85 \times 6 + 2$ donc le reste n'est pas égal à 8. » Retrouver l'erreur commise par Jeanne.

