

Exercices : opérations sur les congruences

Exercice 1 a. Déterminer le reste de la division de 39 , puis de 39^3 , par 7 .

b. En déduire le reste de la division euclidienne de 39^{60} par 7 .

Exercice 2 Démontrer que $(451 \times 6^{43} - 914)$ est divisible par 7 .

Exercice 3 (d'après bac S, Métropole, juin 2009) Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel k , on a $2^{3k} \equiv 1[7]$.

b. Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?

2. Soient a et b deux entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.

On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7 .

a. Vérifier que $10^3 \equiv -1[7]$.

b. En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

Exercices : série de restes et disjonctions de cas

Exercice 1 L'objectif de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x \equiv 2[5]$.

1. Utiliser un tableau de congruence pour déterminer les restes possibles de $3x$ dans la division par 5 .

2. En déduire les solutions de l'équation dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 2 a. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x + 2 \equiv 10[4]$.

b. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant : $\begin{cases} 2x - 3 \equiv 1[7] \\ -6 < x < 20 \end{cases}$

Exercice 3 a. Compléter cette table des restes.

b. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(x + 3)^2 \equiv 1[4]$.

c. Prouver que l'équation diophantienne $7x^2 - 4y^2 = 1$, d'inconnues x et y , n'a pas de solution.

$x \equiv \dots (4)$	0	1	2	3
$x^2 \equiv \dots (4)$				

Exercice 4 On veut montrer que l'équation (E): $11x^2 - 7y^2 = 5$ n'a pas de solution entière.

1. On suppose qu'il existe une solution $(x; y)$.

En raisonnant modulo 5 , montrer que l'équation (E) peut se mettre sous la forme $x^2 \equiv 2y^2[5]$.

2. Recopier et compléter les tableaux de congruence ci-contre.

3. Montrer que x et y sont multiples de 5 , puis conclure.

$x \equiv \dots (5)$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv \dots (5)$					
$y \equiv \dots (5)$	0	1	2	3	4
$2y^2 \equiv \dots (5)$					

Exercice : critères de divisibilité

Exercice 1 On considère un entier de 3 chiffres. On appelle *renversé* de cet entier le nombre qui s'écrit en échangeant les chiffres des centaines et des unités. Par exemple, le renversé de 158 est 851 . Montrer que la différence entre un entier de 3 chiffres et son renversé est divisible par 9 .

Exercice 2 Soit n un entier naturel. On sépare son nombre de dizaines a et le chiffre des unités b .

On a alors $n = 10a + b$.

1. Prouver que n est divisible par 17 si, et seulement si, $a - 5b$ est divisible par 17 .

2. Montrer par ce procédé (que l'on peut réitérer) que les nombres 816 et $16\,983$ sont divisibles par 17 .

Exercice 3 1. Quel est le chiffre des unités de 9^{231} ? Justifier.

2. Quel est le chiffre des unités de 4^{125} ? Justifier.