

Chapitre 5 – Nombres complexes et géométrie

1. Représentation graphique

1a. Plan complexe

Définition :

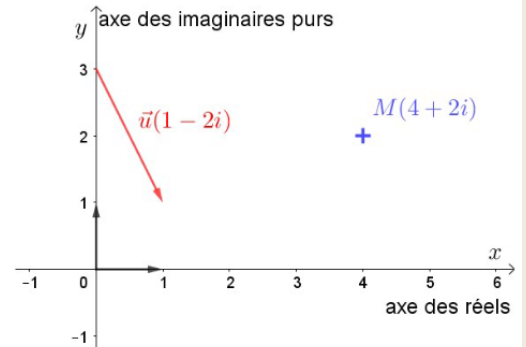
- à tout nombre complexe $z = a + ib$, on peut associer l'unique point $M(a; b)$ ou l'unique vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
- réciproquement, à tout point $M(x; y)$ ou tout vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on peut faire correspondre le nombre complexe $z = x + iy$. Dans ces cas, le nombre z s'appelle l'affixe du point M ou du vecteur $\vec{u}$.

Remarques

- Les nombres réels sont représentés sur l'axe des abscisses, les imaginaires purs sont sur l'axe des ordonnées.
- Si M est un point, on note son affixe z_M . Si $\vec{u}$ est un vecteur, on note son affixe $z_{\vec{u}}$.

Exemples : Donner l'affixe du point $A(5; -1)$: $z_A =$

Donner le vecteur d'affixe $z_{\vec{v}} = 3i - 4$: $\vec{v} \left(\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \right)$



$$z_A = 5 - i \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1b. Vecteur, milieu et conjugué

Propriété : soient A d'affixe z_A et B d'affixe z_B . Alors :

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- M , milieu de $[AB]$ a pour affixe $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$

Propriété : soit M , point d'affixe $z \in \mathbb{C}$. Alors :

- le point d'affixe $-z$ est le symétrique de M par rapport à l'origine,
- le point d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Remarques : • Deux points sont confondus si et seulement si leurs affixes sont égaux, et deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs affixes le sont.

• Les opérations sur les vecteurs correspondent exactement aux opérations sur les affixes correspondants.

Si $\vec{u}$ a pour affixe z et $\vec{v}$ a pour affixe z' , alors :

$\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$ $-\vec{u}$ a pour affixe $-z$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\vec{u}$ a pour affixe λz

L'intérêt de travailler avec les complexes vient du fait que les nombres complexes, contrairement aux vecteurs, peuvent être multipliés et divisés entre eux. Nous le verrons plus tard.

Exemple 1 Soit A le point d'affixe $a = 3 - 7i$.

a. Déterminer l'affixe de A_1 , symétrique de A par rapport à l'origine du repère.

b. Déterminer l'affixe de A_2 , symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses.

c. Déterminer l'affixe de A_3 , symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple 2 Soient A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A = 3 + 5i$, $z_B = -\frac{1}{4} + 2i$ et $z_C = 3i$.

Déterminer les affixes des points D, E et F définis par :

- a. D est le milieu du segment $[AC]$ b. $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ d. $\overrightarrow{AF} = 5\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

Exemple 1

a. L'affixe de A_1 est $-a = -3 + 7i$.

b. L'affixe de A_2 est $\bar{a} = 3 + 7i$

c. L'affixe de A_3 est $-\bar{a} = -3 - 7i$

Exemple 2

a. $z_D = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{3 + 5i + 3i}{2} = \frac{3 + 8i}{2} = \frac{3}{2} + 4i$

b. $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow z_E - z_B = \frac{2}{3}(z_C - z_A) \Leftrightarrow z_E = \frac{2}{3}(z_A - z_C) + z_B$. Donc :

$$z_E = \frac{2}{3}(3 + 5i - 3i) - \frac{1}{4} + 2i = 2 + \frac{4}{3}i - \frac{1}{4} + 2i = \frac{7}{4} + \frac{10}{3}i$$

c. $\overrightarrow{AF} = 5\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow z_F - z_A = 5(z_B - z_A) - (z_C - z_B) \Leftrightarrow z_F = -4z_A + 6z_B - z_C$

$$z_F = -4(3 + 5i) + 6\left(-\frac{1}{4} + 2i\right) - 3i$$

$$z_F = -12 - 20i - \frac{3}{2} + 12i - 3i$$

$$z_F = -\frac{27}{2} - 11i$$

2. Module

2a. Définition

Définition : soit $z \in \mathbb{C}$, et soit M le point d'affixe z .

Le **module** de z , noté $|z|$, est la **distance** OM .

Propriété : si $z = a + ib$, on a alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Exemple : calculer les modules de $z_A = 4 - 3i$ et de $z_B = -\sqrt{3} + \sqrt{2}i$.

Remarques : • si z représente l'affixe d'un vecteur, alors $|z|$ est la **norme** du vecteur.

- si z est un réel, autrement si $z = a \in \mathbb{R}$, alors $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$ (valeur absolue de a)
- de même si z est un imaginaire pur, autrement si $z = ib$ avec $b \in \mathbb{R}$, alors $|z| = \sqrt{0^2 + b^2} = \sqrt{b^2} = |b|$
- deux nombres complexes distincts peuvent avoir le même module,

par exemple $|1 + i| =$

et $|1 - i| =$

Propriétés : pour tout $z \in \mathbb{C}$,
• $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ • $|-z| = |z|$ • $|\bar{z}| = |z|$

Exemple

$$|z_A| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$|z_B| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{3 + 2} = \sqrt{5}$$

$$|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ et } |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

2b. Opérations sur le module

Propriété : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \times \bar{z} = |z|^2$

Démonstration : si $z = a + ib$, alors :

$$z \times \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Propriétés : pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:

(a) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ (b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$

(c) $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ (d) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Démonstrations de (a), (b) et (c) :

(a) Remarquons d'abord que les deux membres de l'égalité étant positifs, il suffit de montrer que leurs carrés sont égaux, c'est-à-dire que

$$|zz'|^2 = (|z||z'|)^2 = |z|^2|z'|^2$$

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

• D'une part,

$$zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + ia'b + i^2bb' = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$$

$$\text{Donc } |zz'|^2 = (aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2$$

$$= (aa')^2 - 2aa'bb' + (bb')^2 + (ab')^2 + 2ab'a'b + (a'b)^2$$

$$= (aa')^2 + (bb')^2 + (ab')^2 + (a'b)^2$$

• D'autre part, $|z|^2|z'|^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)$

$$= (aa')^2 + (ab')^2 + (ba')^2 + (bb')^2$$

et on retrouve l'expression de $|zz'|^2$ calculée précédemment.

On a montré que $|zz'|^2 = |z|^2|z'|^2$. On en déduit que $|zz'| = |z||z'|$.

(b) Montrons cette propriété par récurrence en utilisant **(a)**.

Initialisation : d'une part, $|z^0| = |1| = 1$ et d'autre part, $|z|^0 = 1^0 = 1$.

On a bien $|z^0| = |z|^0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $|z^n| = |z|^n$. Alors :

$$|z^{n+1}| = |z^n \times z| = |z^n| \times |z| = |z|^n \times |z| = |z|^{n+1}.$$

On a bien démontré la propriété au rang suivant.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$.

(c) Montrons d'abord une autre propriété sur le module d'un inverse : pour tout

$z \in \mathbb{C}$, $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$. Nous pourrions ensuite conclure en utilisant **(a)**.

Comme pour la démonstration de **(a)**, il suffit d'avoir $\left| \frac{1}{z} \right|^2 = \frac{1}{|z|^2}$.

Soit $z = a + ib$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

On calcule alors $\left| \frac{1}{z} \right|^2$:

$$\left|\frac{1}{z}\right|^2 = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2} = \frac{1}{|z|^2}$$

Ainsi, on a montré que $\left|\frac{1}{z}\right|^2 = \frac{1}{|z|^2}$, ce qui implique $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Montrons maintenant la propriété **(c)**. Pour z et z' complexes :

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z \times \frac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z'}\right| = |z| \times \frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}$$

2c. Configurations

Propriété : soient deux points A et B . Alors :

$$AB = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|$$

Exemple 1 Soient A d'affixe $z_A = 6 + 3i$ et $B(3; -4)$. Déterminer la distance AB .

Exemple 2 Dans un repère orthonormé, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a. $|z| = 3$

b. $|z - 3 + 4i| = 2$

c. $|z - 2 + i| = |z + 4 - 2i|$

Exemple 1

On a $z_B = 3 - 4i$. Donc :

$$AB = |3 - 4i - (6 + 3i)| = |3 - 4i - 6 - 3i| = |-3 - 7i| = \sqrt{(-3)^2 + (-7)^2} = \sqrt{58}$$

Exemple 2

a. Les points vérifiant $|z| = 3$ sont ceux qui sont à une distance de l'origine O égale à 3. Il s'agit donc du **cercle de centre O et de rayon 3**.

b. Soit $B(3; -4)$. L'égalité de la question se réécrit $|z - z_B| = 2$.

Les points vérifiant cette égalité sont ceux qui sont à une distance du point B égale à 2. Il s'agit donc du **cercle de centre $B(3; -4)$ et de rayon 2**.

c. Soient deux points $C(2; -1)$ et $D(-4; 2)$.

L'égalité de la question se réécrit $|z - z_C| = |z - z_D|$.

Les points vérifiant cette égalité sont ceux qui sont équidistants du point C et du point D . D'après vos cours de 6^{ème}, il s'agit de la **médiatrice du segment $[CD]$** .

3. Argument

3a. Définition

Dans un repère du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$, soit M un point d'affixe $z \in \mathbb{C}^*$.

Un **argument de z** est une **mesure de l'angle orienté entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$** .

Il est donné en **radians** et se note **$\arg(z)$** .

Exemple Placer les points $M_1, M_2 \dots$ d'affixes indiquées, puis donner un argument pour chacun de ces affixes.

$$z_1 = 2 + 2i$$

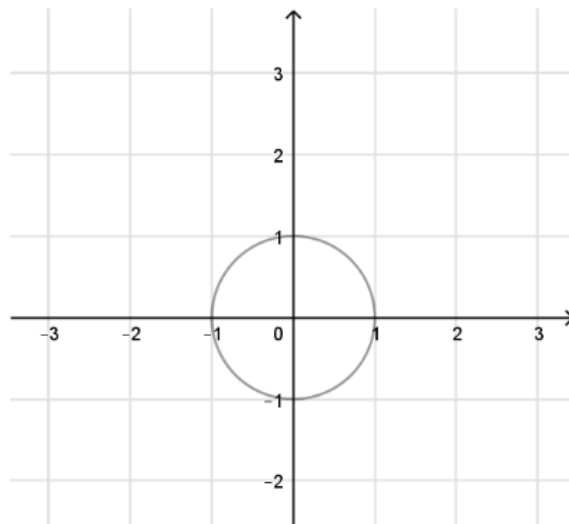
$$z_2 = 3i$$

$$z_3 = -i - 1$$

$$z_4 = -2$$

$$z_5 = -i$$

$$z_6 = -1 + 2i$$



Remarques :

- 0 n'a pas d'argument.
- un nombre complexe non nul a une infinité d'arguments, qui sont tous égaux modulo 2π .

Dans l'exemple précédent, z_1 a pour arguments $\frac{9\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}; \frac{101\pi}{4} \dots$

Tous les nombres de la forme $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ sont des arguments de z_1 . Ainsi, on note **$\arg(z_1) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$**

Dans ce cas, l'argument compris entre $-\pi$ exclu et π inclus (ici, c'est donc $\frac{\pi}{4}$) s'appelle **argument principal de z_1** .

Propriétés :

- | | | | |
|---|----------|---|----------|
| • $z \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \arg(z) =$ | $[2\pi]$ | • $z \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow \arg(z) =$ | $[2\pi]$ |
| • $z \in i\mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \arg(z) =$ | $[2\pi]$ | • $z \in i\mathbb{R}^- \Leftrightarrow \arg(z) =$ | $[2\pi]$ |

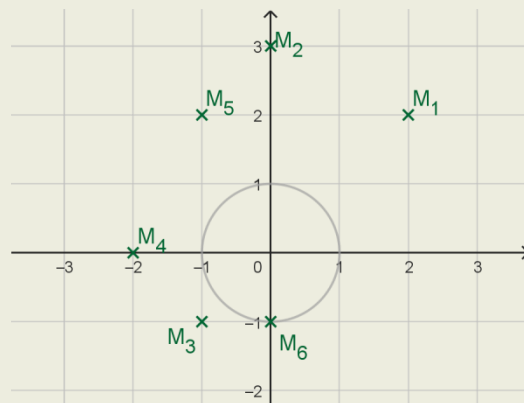
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\arg(-z) =$ $[2\pi]$ et $\arg(\bar{z}) =$ $[2\pi]$

Exemple

$$\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}; \arg(z_2) = \frac{\pi}{2};$$

$$\arg(z_3) = -\frac{\pi}{4}; \arg(z_4) = \pi; \arg(z_5) = -\frac{\pi}{2}$$

Pour z_6 , c'est plus difficile. On trouve environ 117° , soit environ 2 radians.



- | | | | |
|---|------------------------|---|-------------------------|
| • $z \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \arg(z) =$ | $0 [2\pi]$ | • $z \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow \arg(z) =$ | $-\pi [2\pi]$ |
| • $z \in i\mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \arg(z) =$ | $\frac{\pi}{2} [2\pi]$ | • $z \in i\mathbb{R}^- \Leftrightarrow \arg(z) =$ | $-\frac{\pi}{2} [2\pi]$ |

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\arg(-z) = \arg(z) + \pi [2\pi]$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$

3b. Trigonométrie

Propriété : soit $z = a + ib$ un complexe non nul.

Si on note θ un argument de z , il doit vérifier :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

Rappel : pour retrouver un angle en radians dont on connaît le cosinus et le sinus, on utilise ces propriétés :

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

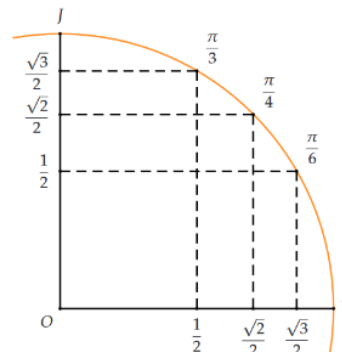
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Pour trouver un angle correspondant à un cosinus ou un sinus, il faut généralement avoir les deux.

Toutefois, on peut souvent conclure en regardant les signes des parties réelles et imaginaires.

Propriété : deux nombres complexes sont **égaux** si et seulement s'ils ont **même module** et **même argument**.

Exemple Donner le module et un argument des nombres suivants :

$$z_1 = \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 3 - 3i$$

$$z_3 = -2 - \sqrt{12}i$$

$$z_4 = -4 + 3i \text{ (au millième près)}$$

• $|z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$. Soit θ_1 un argument de z_1 .

$$\cos(\theta_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_1) = \frac{1}{2}$$

donc $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ d'après le tableau.

• $|z_2| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$. Soit θ_2 un argument de z_2 .

$$\cos(\theta_2) = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_2) = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

D'après les formules et le tableau, le cosinus est celui de $\frac{\pi}{4}$ ou de $-\frac{\pi}{4}$, mais le sinus est négatif. Donc $\theta_2 = -\frac{\pi}{4}$.

• $|z_3| = \sqrt{(-2)^2 + (-\sqrt{12})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$. Soit θ_3 un argument de z_3 .

$$\cos(\theta_3) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_3) = \frac{-\sqrt{12}}{4} = -\frac{\sqrt{4 \times 3}}{4} = -\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Or $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, donc son opposé est $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

Le sinus étant négatif, on en déduit que $\theta_3 = -\frac{2\pi}{3}$.

• $|z_4| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$. Soit θ_4 un argument de z_4 .

$$\cos(\theta_4) = \frac{-4}{5} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_4) = \frac{3}{5}$$

On calcule alors, le sinus étant positif, que $\theta_4 \approx 143,130^\circ$.

3c. Forme trigonométrique

Propriété : tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ peut s'écrire sous la forme

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

où $r = |z|$ est le module de z , et $\theta = \arg(z) [2\pi]$

C'est la **forme trigonométrique de z** .

Remarque : dans une forme trigonométrique $r(\cos \theta + i \sin \theta)$, r est toujours strictement positif.

Exemple 1 Donner la forme trigonométrique du nombre $z = -1 + i\sqrt{3}$

Exemple 2

a. Donner la forme algébrique de

$$z_1 = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right)$$

b. Soit z_2 un nombre complexe de module 8 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$. Donner sa forme algébrique.

Exemple 1

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$. Soit θ un argument de z .

$$\cos(\theta) = \frac{-1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

donc $\theta = \frac{2\pi}{3}$ et la forme trigonométrique de z est $z = 2 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right)$

Exemple 2 Pour retrouver la forme algébrique, il suffit de développer la forme trigonométrique.

$$\text{a. } z_1 = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right)$$

$$z_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$$

$$\text{b. } z_2 = 8 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

$$z_2 = 8 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \right)$$

$$z_2 = -4 + 4\sqrt{3}i$$

3d. Opérations sur l'argument

Propriétés : pour a et b réels :

$$\begin{aligned}\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) & \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \\ \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\end{aligned}$$

En prenant $a = b$ dans les formules précédentes, on trouve aussi :

$$\cos(2a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2 = 1 - 2\sin(a)^2 = 2\cos(a)^2 - 1 \quad \text{et} \quad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

Ces formules ne sont pas à retenir et ne nous serviront qu'à montrer d'autres formules sur les arguments. Toutefois, à un niveau plus élevé, il faudra peut-être les connaître. Pour cela, on peut retenir que le sinus est « aimable et conformiste », alors que le cosinus est « inamical et rebelle ».

Propriété : soient deux nombres complexes z et z' non nuls. Alors :

(a) $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$

(b) pour $n \in \mathbb{N}$, $\arg(z^n) = n \times \arg(z)$

(c) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Démonstration :

(a) Soient $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ et $z' = r'(\cos(\theta') + i \sin(\theta'))$ les formes trigonométriques de z et z' .

$$zz' = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \times r'(\cos(\theta') + i \sin(\theta'))$$

$$zz' = rr'(\cos(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)i\sin(\theta') + i\sin(\theta)\cos(\theta') + i^2\sin(\theta)\sin(\theta'))$$

$$zz' = rr'(\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')))$$

$$zz' = rr'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$$

$$\text{et ainsi } \arg(zz') = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z')$$

(b) Cette propriété se montre **par récurrence** en utilisant (a), exactement comme la propriété sur le produit des modules.

(c) Il suffit de montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$.

On peut alors conclure avec (a), à nouveau, comme sur la propriété du quotient des modules. Soit $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ la forme trigonométrique de z .

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))} = \frac{1}{r} \times \frac{\cos(\theta) - i \sin(\theta)}{(\cos(\theta) + i \sin(\theta))(\cos(\theta) - i \sin(\theta))}$$

$$= \frac{1}{r} \times \frac{\cos(\theta) - i \sin(\theta)}{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}$$

Or pour tout angle θ , $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

De plus, $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ et $-\sin(\theta) = \sin(-\theta)$. Ainsi :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \times \frac{\cos(\theta) - i \sin(\theta)}{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \frac{1}{r} (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

On a trouvé la forme trigonométrique de $\frac{1}{z}$. On en déduit que $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\theta = -\arg(z)$. On conclut ensuite en utilisant la propriété (a).

Exemple 1 Soient z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $\arg(z) = \frac{\pi}{5}$ et $\arg(z') = \frac{-3\pi}{7}$

Déterminer l'argument principal de : **a.** zz' **b.** $\frac{z'}{z}$ **c.** z^4 **d.** $\frac{z^3}{z'}$

Exemple 2 Soient $z_1 = -\sqrt{3} + i$ et $z_2 = -4i$. Déterminer $\arg(z_1 z_2)$ et $\arg(z_1^{2020})$

Dans chaque cas, donner un argument compris entre $-\pi$ et π .

Exemple 1

$$\text{a. } \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') = \frac{\pi}{5} + \frac{-3\pi}{7} = \frac{7\pi}{35} + \frac{-15\pi}{35} = -\frac{8\pi}{35}$$

$$\text{b. } \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) = \frac{-3\pi}{7} - \frac{\pi}{5} = \frac{-15\pi}{35} - \frac{7\pi}{35} = -\frac{22\pi}{35}$$

$$\text{c. } \arg(z^4) = 4 \arg(z) = 4 \times \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$$

$$\text{d. } \arg\left(\frac{z^3}{z'}\right) = 3 \arg(z) - \arg(z') = 3 \times \frac{\pi}{5} - \frac{-3\pi}{7} = \frac{21\pi}{35} + \frac{15\pi}{35} = \frac{36\pi}{35}$$

Exemple 2

$$\bullet |z_1| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2. \text{ Soit } \theta_1 \text{ un argument de } z_1.$$

$$\cos(\theta_1) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin(\theta_1) = \frac{1}{2} \text{ donc } \theta_1 = \frac{5\pi}{6}$$

$$\bullet z_2 \text{ est un imaginaire pur à partie imaginaire négative, donc } \theta_2 = \arg(z_2) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\bullet \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{5\pi}{6} + \frac{-\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} + \frac{-3\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$\bullet \arg(z_1^{2020}) = 2020 \arg(z_1) = \frac{10\,100\pi}{6} = \frac{5\,050\pi}{3}$$

Pour obtenir l'argument principal, il faut enlever un certain nombre de fois 2π pour obtenir un résultat entre $-\pi$ et π . On remarque d'abord que $2\pi = \frac{6\pi}{3}$.

Ensuite, la division euclidienne de 5 050 par 6 est : $5\,050 = 6 \times 841 + 4$. Donc :

$$\arg(z_1^{2020}) = \frac{5\,050\pi}{3} = 841 \times \frac{6\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 841 \times 2\pi + \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} [2\pi]$$

$\frac{4\pi}{3}$ n'étant pas compris entre $-\pi$ et π , on enlève encore une fois 2π pour obtenir :

$$\arg(z_1^{2020}) = \frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

3e. Étude de configurations du plan

Propriété : soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'affixes $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$.

Une mesure de l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$ formé par ces vecteurs est $\arg\left(\frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}\right)$

Remarques :

- on en déduit que si A, B, C et D sont quatre points distincts, la mesure de l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right)$.

- l'argument d'un nombre réel est 0 (s'il est positif) ou π (s'il est négatif).

Ainsi, A, B et C sont alignés si et seulement si $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)$ vaut 0 ou π , donc si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ est réel.

Exemple 1 Soient A, B et C trois points d'affixe respective $a = -1 + 2i$, $b = 4 + 3i$ et $c = -6 + i$.

a. Déterminer la longueur AB .

b. Que peut-on dire de la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$?

Exemple 2 Soient A, B, C et D quatre points d'affixes $z_A = 1 - 2i$, $z_B = 2$, $z_C = 4 + 4i$ et $z_D = -2 + 2i$.

a. Démontrer que A, B et C sont alignés.

b. Déterminer l'affixe du point F , symétrique de D par rapport à A .

Exemple 3 Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives $a = 2 + i$; $b = 4 - i$ et $c = -2 - 3i$.

Calculer $\frac{a-b}{c-a}$. Que peut-on en conclure concernant les droites (AB) et (AC) ?

Exemple 4 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(4z^2 - 20z + 37)(2z - 7 + 2i) = 0$.

Démontrer que les solutions de cette équation sont les affixes de points appartenant à un même cercle, dont le centre est le point P d'affixe 2.

Exemple 1

a. $AB = |b - a| = |4 + 3i - (-1 + 2i)| = |5 + i| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

b. Il s'agit de calculer l'argument du quotient :

$$\frac{z_{\overrightarrow{BA}}}{z_{\overrightarrow{BC}}} = \frac{a - b}{c - b} = \frac{-1 + 2i - (4 + 3i)}{-6 + i - (4 + 3i)} = \frac{-5 - i}{-10 - 2i} = \frac{-5 - i}{2(-5 - i)} = \frac{1}{2}$$

Ce quotient est un réel positif donc son argument est 0.

Ainsi, l'angle $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$ est un **angle nul** : les points A, B et C sont alignés.

Exemple 2

a. On calcule le quotient :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 + 4i - (1 - 2i)}{2 - (1 - 2i)} = \frac{3 + 6i}{1 + 2i} = \frac{3(1 + 2i)}{1 + 2i} = 3$$

Ce quotient est un réel, donc **les points A, B et C sont alignés.**

b. L'énoncé nous dit que $z_F = z_A + z_{\overrightarrow{DA}} = z_A + (z_A - z_D) = 2z_A - z_D$.

Donc $z_F = 2(1 - 2i) - (-2 + 2i) = 4 - 6i$.

Exemple 3

$$\frac{a-b}{c-a} = \frac{2+i-(4-i)}{-2-3i-(2+i)} = \frac{-2+2i}{-4-4i} = \frac{-2+2i}{2i(-2+2i)} = \frac{1}{2i} = \frac{-2i}{2i \times (-2i)} = -\frac{2i}{4} = -\frac{i}{2}$$

Ainsi, ce nombre est un imaginaire pur à partie imaginaire négative.

Son argument est $-\frac{\pi}{2}$, or cet argument correspond aussi à la mesure d'angle entre $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$. Donc les droites **(AB) et (AC) sont perpendiculaires.**

Exemple 4

Il s'agit d'une équation produit nul.

• le premier facteur est un polynôme de discriminant $\Delta = (-20)^2 - 4 \times 4 \times 37 = 400 - 592 = -192$. Les racines complexes conjuguées sont donc :

$$z_1 = \frac{20 + i\sqrt{192}}{2 \times 4} = \frac{5}{2} + i\sqrt{3} \text{ et } z_2 = \bar{z}_1 = \frac{5}{2} - i\sqrt{3}$$

• le deuxième facteur est une équation linéaire. Appelons la troisième solution z_3 :

$$2z_3 - 7 + 2i = 0 \Leftrightarrow 2z_3 = 7 - 2i \Leftrightarrow z_3 = \frac{7}{2} - i$$

Il s'agit maintenant de calculer la distance entre ces trois points et le point d'affixe $z_P = 2$. Pour se simplifier les calculs, on cherche plutôt le carré de la distance. Il faut trouver le même résultat pour les trois points.

$$\bullet |z_1 - z_P|^2 = \left| \frac{1}{2} + i\sqrt{3} \right|^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 + (\sqrt{3})^2 = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4}$$

$$\bullet |z_2 - z_P|^2 = \left| \frac{1}{2} - i\sqrt{3} \right|^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 + (-\sqrt{3})^2 = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4}$$

$$\bullet |z_3 - z_P|^2 = \left| \frac{3}{2} - i \right|^2 = \left(\frac{3}{2} \right)^2 + (-1)^2 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$$

Ainsi, les trois solutions correspondent à des points qui sont sur le cercle de centre P et de rayon $\frac{13}{4}$.

4. Forme exponentielle

4a. Définition

Définition : on admet que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on peut définir une fonction exponentielle ainsi : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Ainsi, si $z \in \mathbb{C}^*$ a pour forme trigonométrique $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, z peut se réécrire de façon unique $z = re^{i\theta}$, c'est sa **forme exponentielle**.

La justification de cette définition (qui est en fait une propriété) est d'un niveau plus avancé. En voici une idée. On peut se demander ce que la fonction exponentielle vient faire ici. Au départ, c'est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$. Ici, on essaye d'y mettre une variable complexe avec i . Mais comment définir cette exponentielle complexe ?

La définition vient de la notion de **série entière**, étudiée bien plus tard. On démontre que pour tout x réel :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

où $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$. Cette écriture s'appelle le développement en série entière de la fonction $\exp$.

On peut vérifier, après avoir bien démontré que cette somme infinie converge, qu'elle définit une fonction qui est sa propre dérivée et qui vaut 1 en 0.

Une fois ceci fait, l'exponentielle complexe est définie de la même manière, mais pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

On a donc le droit, de parler de l'exponentielle d'un nombre complexe, donc de choses de la forme $e^{i\theta}$.

Maintenant, pourquoi a-t-on $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$? La réponse est trop longue pour être expliquée ici, mais vient également du développement en série entière des fonctions $\cos$ et $\sin$. Cette formule $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ s'appelle la formule d'Euler, elle a été démontrée en 1748.



Remarque : dans $re^{i\theta}$, r doit être strictement positif : $-2e^{i\frac{\pi}{3}}$ n'est pas une forme exponentielle.

Exemple 1 Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants.

a. z_1 de module 2 et d'argument $\frac{5\pi}{6}$

b. $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}} z_1^2$

Exemple 2 On considère le nombre complexe $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$. Déterminer la forme algébrique de z^{10} .

Exemple 1 a. $z_1 = 2e^{\frac{5i\pi}{6}}$

b. $z_2 = e^{-\frac{i\pi}{6}} \left(2e^{\frac{5i\pi}{6}} \right)^2 = e^{-\frac{i\pi}{6}} \times 2^2 e^{\frac{5i\pi}{6} \times 2} = 4e^{\frac{10i\pi}{6} - \frac{i\pi}{6}} = 4e^{\frac{9i\pi}{6}} = 4e^{\frac{3i\pi}{2}} = 4e^{-\frac{i\pi}{2}}$

Exemple 2 $z^{10} = \left(2e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^{10} = 2^{10} e^{\frac{10i\pi}{4}} = 1024 e^{\frac{5i\pi}{2}} = 1024 e^{\frac{i\pi}{2}}$

Or $e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$ donc $z_{10} = -1024i$

4b. Opérations sur $e^{i\theta}$

Propriétés : pour tout nombres réels θ et θ' , et tout n entier :

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \quad (\text{multiplier un nombre par } e^{i\theta} \text{ revient à le faire « tourner » d'un angle } \theta)$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} \quad e^{i(\theta+2n\pi)} = e^{i\theta} \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

De plus : $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si et seulement si $\theta = \theta' + 2k\pi$

$$\bullet e^{0i} = e^{2i\pi} = 1 \quad \bullet e^{-i\pi} = -1 \quad \bullet e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad \bullet e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$

Propriétés :

- formule de Moivre : pour tous n entier et $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

- formules d'Euler : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

4c. Applications

Pour effectuer des **produits**, des **quotients** ou calculer des puissances de nombres complexes, la **forme exponentielle** est parfois plus facile.

Exemple 1 On considère le nombre complexe $z_1 = -8 - 8i$.

a. Déterminer la forme algébrique de z_1^4 .

b. Soit $z_2 = 8e^{-i\frac{\pi}{4}}$. On note A le point d'affixe z_1 et B le point d'affixe z_2 .

La droite (AB) est-elle parallèle à l'axe des abscisses ?

Exemple 2 On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_B = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Montrer que OAB est un triangle rectangle isocèle.

Exemple 3 Soient A et B d'affixes respectives $z_A = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_B = \frac{3-i}{2+i}$

a. Donner la forme algébrique de z_B^{24} . Est-ce un nombre réel ?

b. Déterminer la forme exponentielle puis la forme algébrique de $\frac{z_B}{z_A}$. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exemple 1

a. Avant de calculer z_1^4 , déterminons d'abord la forme exponentielle de z_1 .

$|z_1| = \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$. Soit θ_1 un argument de z_1 .

$$\cos(\theta_1) = \frac{-8}{8\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{donc} \quad \theta_1 = -\frac{3\pi}{4}$$

Ainsi, $z_1 = 8\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ On en déduit z_1^4 .

$$z_1^4 = \left(8\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)^4 = (8\sqrt{2})^4 e^{-i\frac{3\pi}{4} \times 4} = 8^4 \sqrt{2}^4 e^{-3i\pi} = 4\,096 \times 4 \times (-1) = -16\,384$$

b. On s'intéresse au vecteur $\overrightarrow{AB}$, qui est obtenu par différence des affixes de z_1 et z_2 . La forme la plus adaptée est donc la forme algébrique. Cherchons celle de z_2 .

$$z_2 = 8e^{-i\frac{\pi}{4}} = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$$

Ainsi, les points d'affixe z_1 et z_2 n'ont pas la même ordonnée. Donc la droite (AB) n'est **pas parallèle à l'axe des abscisses**.

Exemple 2

Tout d'abord, on constate grâce à la forme exponentielle que $|z_A| = |z_B| = 2$. Donc le triangle OAB est déjà **isocèle en O**.

L'angle $\widehat{AOB}$ a pour mesure l'argument de $\arg\left(\frac{z_{OA}}{z_{OB}}\right)$ ce qui correspond à $\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$.

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{3\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad \text{donc} \quad \arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Ainsi, l'angle $\widehat{AOB}$ est droit, et le triangle OAB est **rectangle et isocèle en O**.

Exemple 3

a. Essayons d'abord d'obtenir la forme algébrique de z_B .

$$z_B = \frac{3-i}{2+i} = \frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{6-3i-2i+1}{2^2+1^2} = \frac{5-5i}{5} = 1-i$$

Pour calculer z_B^{2020} , déterminons maintenant la forme exponentielle de z_B .

$$|z_B| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}. \text{ Soit } \theta_B \text{ un argument de } z_B.$$

$$\cos(\theta_B) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin(\theta_B) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ donc } \theta_B = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{Ainsi, } z_B = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_B^{24} = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{24} = \sqrt{2}^{24} e^{-i\frac{24\pi}{4}} = 2^{12} e^{-i6\pi} = 2^{12} = 4\,096, \text{ il s'agit d'un réel.}$$

b. Pour effectuer un quotient, on préfère la forme exponentielle.

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}-(-i\frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{3\pi}{12}+i\frac{4\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{12}}$$

On ne peut pas en déduire la forme algébrique du quotient, car on ne connaît ni $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ni $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Il faut donc calculer la forme algébrique de z_A et en déduire celle du quotient.

$$z_A = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$$

$$\text{Ainsi } \frac{z_B}{z_A} = \frac{1-i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} = \frac{1+i\sqrt{3}-i+\sqrt{3}}{1^2+\sqrt{3}^2} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} + i\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$$

Or l'argument de ce quotient est $\frac{\pi}{12}$ comme vu avec la forme exponentielle, et le cosinus de cet argument est égal à la partie réelle divisée par le module.

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$