

Chapitre 1 – Nombres complexes : algèbre et polynômes

Il est bien connu en mathématiques qu'on ne peut pas calculer la racine carrée d'un nombre négatif.

En effet, tout carré est positif : on ne peut pas trouver de nombre x tel que $x^2 = -49$, donc $\sqrt{-49}$ n'existe pas.

Ainsi, il existe une équation très simple, mais qui n'a pas de solution : $x^2 + 1 = 0$.

Au milieu du XVI^e siècle, le mathématicien italien Jérôme Cardan (Gerolamo Cardano en italien), propose de résoudre le problème suivant : « **trouver deux nombres tels que leur somme soit 10, et leur produit soit 40** ».



Il trouve deux solutions, mais les note $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$. Il les nomme « quantités sophistiquées ».

Plus tard, au XVII^e siècle, Descartes les nommera « quantités **imaginaires** ».



Enfin, au XVIII^e siècle, Euler introduit une nouvelle notation : il pose **i** le nombre tel que $i^2 = -1$. C'est donc la solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$.

De nos jours, les nombres formés à partir de ce **nombre imaginaire i** , appelés **nombres complexes**, sont fréquemment utilisés :

- en **physique** pour représenter les phénomènes ondulatoires en mécanique (oscillations d'un pendule), en électrique ou en optique, notamment dans les télécommunications,
- en **acoustique** (l'étude des sons) pour étudier les phénomènes acoustiques d'une salle (réverbération),
- en **économie** pour modéliser un cycle de croissance ou de prix.

1. Définitions

1a. Ensemble $\mathbb{C}$

Propriété : il existe un ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, qui :

- contient l'ensemble $\mathbb{R}$,
- contient un élément i tel que $i^2 = -1$,
- est muni d'une addition et d'une multiplication prolongeant celles de $\mathbb{R}$.

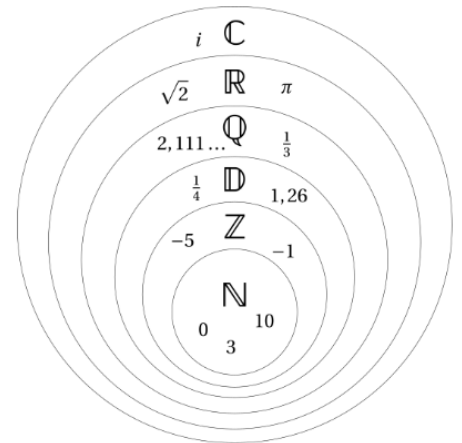
L'ensemble $\mathbb{C}$ est donc un ensemble de plus, qui contient tous les ensembles de nombres que vous connaissiez déjà.

Le but de ce chapitre est de déterminer :

- quels sont les autres nombres inclus dans cet ensemble $\mathbb{C}$,
- comment y effectuer les 4 opérations ($+$ $-$ $\times$ $\div$)
- et comment résoudre des équations faisant intervenir des complexes.

Il existe d'autres ensembles de nombres incluant $\mathbb{C}$, par exemple $\mathbb{H}$.

Toutefois, ces ensembles perdent des règles usuelles par rapport aux nombres réels. Dans $\mathbb{C}$, il n'y a pas exemple pas de relation d'ordre : nous verrons que deux nombres complexes ne peuvent pas être comparés.



1b. Forme algébrique

Propriété : Tout élément z de $\mathbb{C}$ est de la forme $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

- a est la **partie réelle** de z , notée $Re(z)$,
- b est la **partie imaginaire** de z , notée $Im(z)$.

On appelle cette forme la forme algébrique de z .

Exemple 1 Voici des nombres complexes, donner leurs parties réelles et imaginaires.

$z = 5 + 3i$	$Re(z) =$	$Im(z) =$	$z = \sqrt{2}i - 5$	$Re(z) =$	$Im(z) =$
$z = \frac{7}{3} - i$	$Re(z) =$	$Im(z) =$	$z = \pi + \frac{i}{4}$	$Re(z) =$	$Im(z) =$
$z = 8$	$Re(z) =$	$Im(z) =$	$z = \frac{3i - 5}{6}$	$Re(z) =$	$Im(z) =$
$z = -6i$	$Re(z) =$	$Im(z) =$	$z = i(i - 2)$	$Re(z) =$	$Im(z) =$

Définitions : soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

- Si $a = 0$ (c'est-à-dire $Re(z) = 0$), alors $z = ib$. On dit que z est un **imaginaire pur**. On note $z \in i\mathbb{R}$.
- Si $b = 0$ (c'est-à-dire $Im(z) = 0$), alors $z = a$. Alors z est un **nombre réel**, c'est-à-dire que $z \in \mathbb{R}$.

Propriétés :

- Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.
- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires sont égales.

Exemple 2 pour chacun de ces nombres, donner sa forme algébrique, sa partie réelle et sa partie imaginaire.

a. $z = 3i - 4 + 2i - 1$ b. $z = 5i - 7,5 + i$ c. $z = 2 - i^2 + i$

Exemple 3 Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit z un nombre complexe tel que $z = x^2 - x - 2 + 3ix$.

Déterminer les valeurs de x telles que :

- a. z est un réel. Calculer alors z . b. z est un imaginaire pur. Calculer alors z .

Exemple 1

- pour $z = 5 + 3i$, $Re(z) = 5$ et $Im(z) = 3$. Notez que $Im(z)$ est un nombre réel.
- pour $z = \frac{7}{3} - i$, $Re(z) = \frac{7}{3}$ et $Im(z) = -1$.
- pour $z = 8$, $Re(z) = 8$ et $Im(z) = 0$. z est un nombre réel.
- pour $z = -6i$, $Re(z) = 0$ et $Im(z) = -6$. z est un imaginaire pur.
- pour $z = \sqrt{2}i - 5$, $Re(z) = -5$ et $Im(z) = \sqrt{2}$.
- pour $z = \pi + \frac{i}{4}$, $Re(z) = \pi$ et $Im(z) = \frac{1}{4}$.
- pour $z = \frac{3i-5}{6} = -\frac{5}{6} + \frac{1}{2}i$, $Re(z) = -\frac{5}{6}$ et $Im(z) = \frac{1}{2}$.
- pour $z = i(i - 2) = i^2 - 2i = -1 - 2i$, $Re(z) = -1$ et $Im(z) = -2$.

Exemple 2

- a.** $z = 3i - 4 + 2i - 1 = -5 + 5i$ en forme algébrique. $Re(z) = -5$ et $Im(z) = 5$.
b. $z = 5i - 7,5 + i = -7,5 + 6i$ en forme algébrique. $Re(z) = -7,5$ et $Im(z) = 6$.
c. $z = 2 - i^2 + i = 2 - (-1) + i = 3 + i$ en forme algébrique.
 $Re(z) = 3$ et $Im(z) = 1$.

Exemple 3

- a.** z est un réel si et seulement si sa partie imaginaire $3x$ est nulle, donc si $x = 0$.
On a alors $z = 2$.
b. z est un imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle $x^2 - x - 2$ est nulle.
Ce polynôme a pour discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$ et pour racines :
$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$$

Ainsi, $z \in i\mathbb{R}$ si $x = -1$, on a alors $z = 3i \times (-1) = -3i$
ou si $x = 2$, on a alors $z = 3i \times 2 = 6i$

1c. Conjugué

Définition : soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

Alors le **conjugué** de z , noté $\bar{z}$, est le nombre $\bar{z} = a - ib$.

Remarque : $\bar{\bar{z}} = z$

2. Opérations

2a. Somme & différence

Propriétés : soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes. Alors :

- **Additionner** des complexes revient à ajouter leurs parties réelles et imaginaires : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- L'**opposé** de z , noté $-z$, revient à prendre l'opposé des parties réelles et imaginaires : $-z = -a - ib$
- **Soustraire** z' à z revient à ajouter z et l'opposé de z' , ainsi $z - z' = (a - a') + i(b - b')$

Exemple

a. soient $z_1 = 5 - 2i$ et $z_2 = -2 + 4i$. Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 - z_2$.

b. soient $z_1 = -2 + 3i$ et $z_2 = -7i$. Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 - z_2$.

a. $z_1 + z_2 = (5 - 2i) + (-2 + 4i) = \mathbf{3 + 2i}$

$$z_1 - z_2 = (5 - 2i) - (-2 + 4i) = \mathbf{7 - 6i}$$

b. $z_1 + z_2 = (-2 + 3i) + (-7i) = \mathbf{-2 - 4i}$

$$z_1 - z_2 = (-2 + 3i) - (-7i) = \mathbf{-2 + 10i}$$

2b. Produit

Propriété : soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

Alors la multiplication de z par z' est donnée par la formule : $z \times z' = (aa' - bb') + i(a'b + ab')$

Exemples :

a. Démontrer la propriété.

b. Calculer $A = (8 + 3i)(-4 - i)$ et $B = 3i(5 - 7i)$

c. On pose $z_1 = 5 - 2i$ et $z_2 = -2 + 4i$. Calculer $z_1 \times z_2$ et z_1^2 .

d. On pose $z = -7 + i$. Calculer $-3iz$ et $2z^2$.

a. $zz' = (a + ib)(a' + ib')$
 $= aa' + aib' + iba' + i^2bb'$
 $= aa' + iab' + iba' - bb'$
 $= \mathbf{aa' - bb' + i(ab' + ba')}$

Notez qu'en fait, on n'utilise pas beaucoup cette règle...

b. $A = (8 + 3i)(-4 - i) = 32 - 8i + 12i - 3i^2 = 32 + 4i + 3 = \mathbf{35 + 4i}$

$$B = 3i(5 - 7i) = 15i - 21i^2 = \mathbf{21 + 15i}$$

c. $z_1z_2 = (5 - 2i)(-2 + 4i) = -10 + 20i + 4i - 8i^2 = -10 + 24i + 8 = \mathbf{-2 + 24i}$

Pour z_1^2 , on peut essayer l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$$\begin{aligned} z_1^2 &= (5 - 2i)^2 \\ &= 5^2 - 2 \times 5 \times 2i + (2i)^2 \\ &= 25 - 20i + 4i^2 \\ &= 25 - 20i - 4 \\ &= \mathbf{21 - 20i} \end{aligned}$$

d. $-3iz = -3i(-7 + i) = 21i - 3i^2 = \mathbf{3 + 21i}$

Ici, on peut appliquer $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, en se rappelant que $i^2 = -1$.

$$2z^2 = 2(-7 + i)^2 = 2(49 - 14i - 1) = 2(48 - 14i) = \mathbf{96 - 28i}$$

2c. Quotient

Soient z et z' deux nombres complexes, avec $z' \neq 0$.

Pour calculer $\frac{z}{z'}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\bar{z}'$, le conjugué de z' .

- Exemple 1**
- a. Calculer $\frac{4-3i}{1+i}$ et $\frac{1-i}{2i-5}$
 - b. Soit $z = 2 + 3i$. Calculer l'inverse de z .
 - c. Résoudre l'équation suivante : $(5 + 3i)z - 2 = i + 7$

Remarque : $\frac{1}{i} =$

Exemple 2 Soient $z_1 = 3i - \sqrt{3}$ et $z_2 = 2 - 3i$. Calculer $\frac{1}{z_1}$ et $\frac{z_2}{z_1}$.

Exemple 1 a. Nous allons multiplier le numérateur et le dénominateur de la fraction par le conjugué de $(1 + i)$, c'est-à-dire $(1 - i)$.

Le calcul est terminé quand on a obtenu la forme algébrique $a + ib$ du résultat.

$$\frac{4 - 3i}{1 + i} = \frac{(4 - 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{4 - 4i - 3i + 3i^2}{1^2 - i^2} = \frac{1 - 7i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$$

Nous verrons plus tard que pour tout nombre complexe $z = a + ib$, multiplier z par son conjugué donne toujours un nombre réel, précisément $a^2 + b^2$.

$$\frac{1 - i}{2i - 5} = \frac{(1 - i)(-2i - 5)}{(2i - 5)(-2i - 5)} = \frac{-2i - 5 + 2i^2 + 5i}{5^2 - (2i)^2} = \frac{-7 + 3i}{25 - 4i^2} = -\frac{7}{29} + \frac{3}{29}i$$

b. L'inverse de z est $\frac{1}{z}$.

$$\frac{1}{2 + 3i} = \frac{2 - 3i}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{2 - 3i}{2^2 - (3i)^2} = \frac{2 - 3i}{4 - 9i^2} = \frac{2 - 3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$$

c. $(5 + 3i)z - 2 = i + 7 \Leftrightarrow (5 + 3i)z = i + 9$. Ainsi :

$$z = \frac{i + 9}{5 + 3i} = \frac{(i + 9)(5 - 3i)}{(5 + 3i)(5 - 3i)} = \frac{5i - 3i^2 + 45 - 27i}{5^2 - (3i)^2} = \frac{48 - 22i}{34} = \frac{24}{17} - \frac{11}{17}i$$

Remarque

$$\frac{1}{i} = \frac{-i}{i \times (-i)} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = -i$$

Exemple 2

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{3i - \sqrt{3}} = \frac{-3i - \sqrt{3}}{(3i - \sqrt{3})(-3i - \sqrt{3})} = \frac{-3i - \sqrt{3}}{\sqrt{3}^2 - (3i)^2} = \frac{-3i - \sqrt{3}}{12} = -\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{4}i$$

$$\frac{z_2}{z_1} = z_2 \times \frac{1}{z_1} = (2 - 3i) \left(-\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{4}i \right) = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}i - \frac{1}{2}i + \frac{3}{4}i^2$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{3}{4} + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \right) i$$

2d. Opérations et conjugué

Propriétés : Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

- $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$
- $-\bar{z} = \overline{-z}$
- $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$: le produit d'un complexe par son conjugué est réel.

Propriétés : Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- $\frac{\bar{z}}{z'} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \quad (z' \neq 0)$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

Exemple 1 Déterminer la forme algébrique du conjugué de $z = \frac{(3+2i)(1-i)}{(1+2i)^2}$.

Exemple 2 Montrer que pour tout nombre complexe $z \neq 0$, le nombre complexe $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}$ est un réel.

Exemple 3 Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul. Déterminer si le nombre $\frac{z+\bar{z}}{z-\bar{z}}$ est un réel ou un imaginaire pur.

Exemple 1 On applique la propriété : les conjugués de produits/quotients/carrés sont égaux aux produits/quotients/carrés des conjugués.

$$\bar{z} = \frac{\overline{(3+2i)(1-i)}}{\overline{(1+2i)^2}} = \frac{(3-2i)(1+i)}{(1-2i)^2} = \frac{3+3i-2i-2i^2}{1^2-4i+(2i)^2} = \frac{5+i}{-3-4i}$$

Pour aller plus vite, on applique la nouvelle propriété : $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$.

$$\frac{5+i}{-3-4i} = \frac{(5+i)(-3+4i)}{(-3-4i)(-3+4i)} = \frac{-15+20i-3i+4i^2}{3^2+4^2} = \frac{-19+17i}{25} = -\frac{19}{25} + \frac{17}{25}i$$

Exemple 2

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} + \frac{z}{\bar{z}z} = \frac{\bar{z} + z}{z\bar{z}}$$

Or $\bar{z} + z = 2\operatorname{Re}(z)$ qui est un réel, et $z\bar{z}$ est également un réel.

Donc leur quotient est réel. Ainsi $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}$ est un réel.

Exemple 3

$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ est un réel, et $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z) = 2\operatorname{Im}(z) \times i$. Donc :

$$\frac{z + \bar{z}}{z - \bar{z}} = \frac{2\operatorname{Re}(z)}{2\operatorname{Im}(z) \times i} = \frac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Im}(z)} \times \frac{1}{i} = \frac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Im}(z)} \times (-i)$$

Il s'agit donc d'un **imaginaire pur**.

3. Équations et polynômes

3a. Équations linéaires

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

Exemple 1 (équations linéaires, de la forme $az = b$)

a. $(6 - 10i)z = 2$

b. $-3iz = 1$

c. $z(7 - i) = 1 + 2i$

d. $(2i + 1)z = 1 + i - 2iz$

Exemple 2 (équations produit nul)

a. $(z - 2i)(iz + 1) = 0$

b. $2iz^2 + 3z = 0$

Exemple 3 (équations incluant un complexe et son conjugué) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a. $-\bar{z} = 5 - i$

b. $2z + \bar{z} = 3 - 2i$

c. $2z = 3\bar{z} + 5 - i$

Exemple 1 a. $(6 - 10i)z = 2$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2}{6 - 10i} = \frac{1}{3 - 5i} = \frac{3 + 5i}{3^2 + 5^2} = \frac{3}{34} + \frac{5}{34}i$$

b. $-3iz = 1$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{-3i} = \frac{i}{-3i \times i} = \frac{i}{3} = \frac{1}{3}i$$

c. $z(7 - i) = 1 + 2i$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1 + 2i}{7 - i} = \frac{(1 + 2i)(7 + i)}{7^2 + 1^2} = \frac{7 + i + 14i + 2i^2}{50} = \frac{5 + 15i}{50} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$$

d. $(2i + 1)z = 1 + i - 2iz \Leftrightarrow (2i + 1)z + 2iz = 1 + i \Leftrightarrow (4i + 1)z = 1 + i$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1 + i}{4i + 1} = \frac{(1 + i)(-4i + 1)}{1^2 + 4^2} = \frac{-4i + 1 - 4i^2 + i}{17} = \frac{5 - 3i}{17} = \frac{5}{17} - \frac{3}{17}i$$

Exemple 2 a. $(z - 2i)(iz + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z - 2i = 0 \\ iz + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ z = i \end{cases}$ et $S = \{i; 2i\}$

b. $2iz^2 + 3z = 0 \Leftrightarrow z(2iz + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 2iz + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = -\frac{3}{2i} = \frac{3}{2}i \end{cases}$

et $S = \{0; \frac{3}{2}i\}$

Exemple 3 a. $-\bar{z} = 5 - i \Leftrightarrow \bar{z} = -5 + i \Leftrightarrow z = -5 - i$

Pour les suivantes qui font intervenir z et $\bar{z}$ à la fois, on doit poser $z = a + ib$.

On doit alors séparer parties réelles et imaginaires dans les deux membres.

b. On pose $z = a + ib$. On a alors $\bar{z} = a - ib$.

$$2(a + ib) + (a - ib) = 3 - 2i \Leftrightarrow 3a + ib = 3 - 2i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 3 \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

donc $z = 1 - 2i$

$$\text{c. } 2(a + ib) = 3(a - ib) + 5 - i \Leftrightarrow -a + 5ib = 5 - i \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 5 \\ 5b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

donc $z = -5 - \frac{1}{5}i$

3b. Polynômes du 2nd degré

Propriété : on considère l'équation $z^2 = a$, où $a \in \mathbb{R}$.

- si $a > 0$, l'équation admet deux solutions réelles : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
- si $a < 0$, l'équation admet **deux solutions complexes** : $\sqrt{-a}i$ et $-\sqrt{-a}i$

Propriété : on considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation.

- si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution réelle : $z_0 = \frac{-b}{2a}$

- si $\Delta < 0$, l'équation admet **deux solutions complexes conjuguées** :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta \neq 0$, alors $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Exemples Résoudre les équations suivantes. Factoriser le membre de gauche de **c** ; **d** et **e**.

a. $16 + z^2 = 0$ **b.** $2z^2 + 10 = 0$ **c.** $z^2 - 4z + 5 = 0$ **d.** $z^2 - 5z + 6 = 0$ **e.** $z^2 + 4z + 13 = 0$

a. $16 + z^2 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -16$ et $S = \{4i; -4i\}$

b. $2z^2 + 10 = 0 \Leftrightarrow 2z^2 = -10 \Leftrightarrow z^2 = -5$ et $S = \{\sqrt{5}i; -\sqrt{5}i\}$

c. $z^2 - 4z + 5 = 0$. Le discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4$.

Les racines complexes conjuguées sont :

$$z_1 = \frac{-(-4) - i\sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i \quad \text{et} \quad z_2 = \bar{z}_1 = 2 + i$$

Donc $S = \{2 - i; 2 + i\}$ et $z^2 - 4z + 5 = (z - (2 - i))(z - (2 + i))$

d. $z^2 - 5z + 6 = 0$. Le discriminant est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1$.

Les racines réelles sont :

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5 - 1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

Donc $S = \{2; 3\}$ et $z^2 - 5z + 6 = (z - 2)(z - 3)$

e. $z^2 + 4z + 13 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 13 = -36$.

$$z_1 = \frac{-4 - i\sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{4 - 6i}{2} = 2 - 3i \quad \text{et} \quad z_2 = \bar{z}_1 = 2 + 3i$$

Donc $S = \{2 - 3i; 2 + 3i\}$ et $z^2 + 4z + 13 = (z - (2 - 3i))(z - (2 + 3i))$